

Министерство образования Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет

*На правах рукописи*

МАРТЮШЕВ ЕВГЕНИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ТРЕХМЕРНЫХ  
МНОГООБРАЗИЙ, УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ**

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор И.Г. Корепанов

Челябинск – 2007

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Геометрические инварианты трехмерных многообразий ..</b>	<b>15</b>
§ 1.1. Допустимая расцветка и отображение $\Gamma: \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .....	15
§ 1.2. Ациклический комплекс и инвариант 3-многообразия .....	31
§ 1.3. Мультипликативность инварианта относительно связной суммы .....	48
§ 1.4. Примеры вычислений .....	52
<b>Глава 2. Модификация инварианта для зацеплений .....</b>	<b>67</b>
§ 2.1. Триангуляции разветвленных накрытий 3-сферы .....	67
§ 2.2. Ациклический комплекс и инвариант зацепления .....	73
§ 2.3. Вычисления для трилистника .....	79
<b>Глава 3. “Скрученная” версия геометрического инварианта .....</b>	<b>85</b>
§ 3.1. Построение для 3-многообразий .....	85
§ 3.2. Построение для зацеплений .....	90
<b>Список литературы .....</b>	<b>95</b>

# Введение

Настоящая диссертация посвящена одной из наиболее актуальных областей современной математики — инвариантам трехмерных многообразий, узлов и зацеплений. Инварианты многообразий — это специальным образом построенные величины, значения которых определяются лишь топологическими свойствами каждого конкретного многообразия и не зависят от деталей построения. Задача различения 3-многообразий с помощью инвариантов является составной частью важнейшей задачи маломерной топологии — полной классификации трехмерных многообразий.

Все трехмерные многообразия, рассматриваемые в диссертации, принадлежат кусочно-линейной категории. Напомним, что по определению топологического  $n$ -мерного многообразия  $M$ , каждая его точка имеет окрестность гомеоморфную евклидовому пространству  $\mathbb{R}^n$ . Конкретный гомеоморфизм  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$  назовем *картой*, совокупность карт, покрывающих  $M$  — *атласом*. Если  $\phi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$  — две карты, то определен гомеоморфизм перехода  $\psi^{-1}\phi$ , отображающий одну область в  $\mathbb{R}^n$  на другую. Если  $\psi^{-1}\phi$  принадлежит классу кусочно-линейных гомеоморфизмов, то карты  $\phi$  и  $\psi$  называются *PL согласованными*. Многообразие  $M$  называется *кусочно-линейным* или *PL  $n$ -многообразием*, если его атлас состоит из *PL согласованных карт*. В случае если все  $\psi^{-1}\phi$  являются диффеоморфизмами, многообразие  $M$  называется *гладким*.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Согласно результату Э. Мойса [55], в размерности 3 на любом топологическом многообразии  $M$  можно ввести как гладкую, так и кусочно-линейную структуру. При этом такая структура единственна в смысле существования диффеоморфизма или кусочно-линейного гомеоморфизма между любыми двумя гладкими или кусочно-линейными многообразиями, гомеоморфными многообразию  $M$ . Таким образом, в размерности 3 категории топологических, кусочно-линейных и гладких многообразий практически совпадают.

Кусочно-линейное многообразие всегда можно триангулировать. Подчеркнем, что в диссертации мы будем иметь дело с триангуляциями в широком (некомбинаторном) смысле: симплекс некоторой размерности в нашей триангуляции может не определяться однозначно множеством своих вершин.<sup>2</sup> Например, триангуляция  $n$ -мерной сферы может состоять из двух  $n$ -симплексов, грани которых попарно склеиваются по тождественному гомеоморфизму.

Разумеется, одно и то же  $PL$   $n$ -многообразие можно триангулировать многими различными способами. В связи с этим возникает вопрос о том, каким образом связаны две триангуляции одного и того же  $PL$   $n$ -многообразия. В начале 1930-х годов Дж. Александер [24] и М. Ньюман [58] показали, что любое подразделение симплициального комплекса может быть получено из исходного посредством конечной последовательности комбинаторных преобразований комплекса — так называемых звездных движений. Однако, количество таких движений бесконечно даже для размерности 3. Значительно позднее, в 1991 году, немецкий математик У. Пахнер [59] выделил *конечное* множество комбинаторных движений, достаточных для того, чтобы перейти от одной триангуляции кусочно-линейного многообразия к любой другой.

**Теорема 0.1** ([57, 59]). *Любые две триангуляции одного  $PL$   $n$ -многообразия связаны конечной последовательностью движений Пахнера.*

Движения Пахнера, фигурирующие в теореме, — это локальные преобразования триангуляции многообразия (аналоги движений Райдемайстера в теории узлов). В каждой размерности количество таких движений конечно. Например, в размерности 3 существует только четыре типа движений Пахнера:

---

<sup>2</sup>В литературе часто можно встретить термин *псевдотриангуляция*.

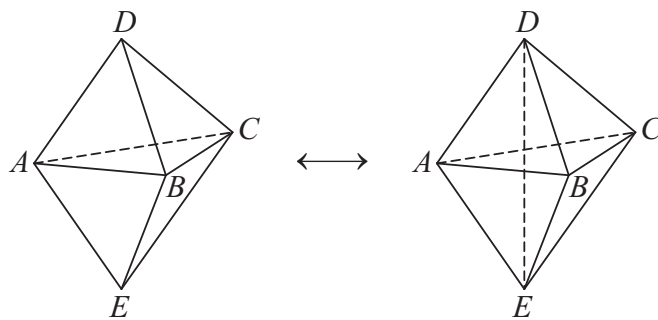
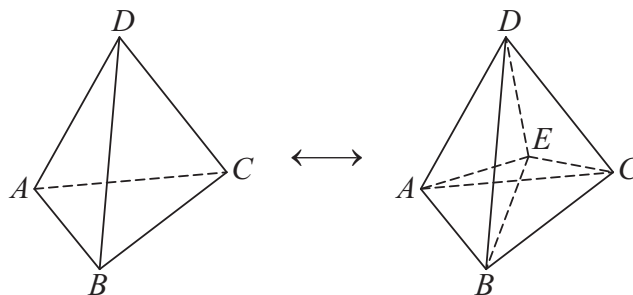
(a)  $2 \leftrightarrow 3$ (b)  $1 \leftrightarrow 4$ 

Рис. 1. Движения Пахнера

$2 \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 4$  и обратные к ним. Определяются они следующим образом. Выделим в триангуляции  $PL$  3-многообразия два смежных тетраэдра  $ABCD$  и  $EABC$ . При движении  $2 \rightarrow 3$  мы добавляем новое ребро  $DE$  к триангуляции и тем самым заменяем два исходных тетраэдра на три новых —  $ABED$ ,  $BCED$  и  $CAED$  (рис. 1(a)). При движении  $1 \rightarrow 4$  в исходный тетраэдр  $ABCD$  добавляется новая вершина  $E$  и четыре новых ребра  $AE$ ,  $BE$ ,  $CE$  и  $DE$ . При этом, взамен тетраэдра  $ABCD$  появляется четыре новых тетраэдра  $ABCE$ ,  $ABED$ ,  $BCED$  и  $CAED$  (рис. 1(b)). Таким образом, из теоремы Пахнера следует, что если у нас есть две триангуляции одного кусочно-линейного трехмерного многообразия, то с помощью конечной последовательности четырех описанных движений можно перейти от одной триангуляции к другой.

Теперь, если какая-либо величина, сопоставленная триангуляции многообразия, не меняется при движениях Пахнера, то, согласно теореме 0.1, эта ве-

личина не зависит и от конкретного способа триангуляции. Значит она зависит только от топологических свойств самого многообразия — является топологическим инвариантом данного многообразия. Примеры подобного рода инвариантов — эйлерова характеристика  $\chi = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \#\{i\text{-симплексы}\}$ ,<sup>3</sup> инварианты Тураева-Виро [70].

В настоящей работе мы развиваем теорию новых топологических инвариантов трехмерных многообразий, узлов и зацеплений, построенных в работах И.Г. Корепанова [43, 8, 9, 10, 44] в 2001–2004 гг. Мы называем эти инварианты геометрическими, поскольку их построение существенным образом опирается на геометрию трехмерного евклидова пространства. Идея построения инвариантов вкратце заключается в следующем.

Мы используем, с одной стороны, обобщение известной из теории струн в теоретической физике  $s \leftrightarrow t$  дуальности [5], а с другой — кручение ациклических комплексов, что берет начало из работ К. Райдемайстера и В. Франца 1930-х годов [62, 32].

Как известно, в теории струн элементарная частица считается не точкой, а линией; соответственно, при движении во времени она замечает мировую поверхность — с математической точки зрения, двумерное многообразие. Сами по себе двумерные многообразия давно классифицированы, но для нас важно, что  $s \leftrightarrow t$  дуальность может быть обобщена на бóльшие размерности. В частности, обобщение  $s \leftrightarrow t$  дуальности на трехмерный случай — это так называемое классическое уравнение пентагона. Уравнением пентагона мы называем всякое алгебраическое соотношение, в естественном смысле соответствующее движе-

---

<sup>3</sup>Здесь и ниже, символ  $\#$  означает число элементов в каком-либо конечном множестве, в данном случае, множестве  $i$ -мерных симплексов.

нию Пахнера  $2 \leftrightarrow 3$  (см. рис. 1(а)), например следующее:

$$V_{ABCD}V_{EABC} = -V_{ABED}V_{BCED}V_{CAED} \cdot \frac{1}{l_{DE}^2} \frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}}. \quad (1)$$

Здесь  $V_{ABCD}$  — ушестеренный объем ориентированного тетраэдра  $ABCD$  в трехмерном евклидовом пространстве:  $V_{ABCD} = (\vec{r}_{AB} \times \vec{r}_{AC}) \cdot \vec{r}_{AD}$ ,  $l_{DE}$  — евклидова длина ребра  $DE$ :  $l_{DE} = \sqrt{\vec{r}_{DE} \cdot \vec{r}_{DE}}$  и  $\omega_{DE}$  — угол дефекта в ребре  $DE$ , который определяется как минус сумма двугранных углов, сосредоточенных в ребре  $DE$ , по модулю  $2\pi$ .

Производную  $\frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}}$  в формуле (1) нужно понимать так. Вокруг ребра  $DE$  на рисунке 1(а) сосредоточено три тетраэдра. Обозначим соответствующие двугранные углы как  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Каждый из этих углов является функцией от  $l_{DE}$  при фиксированных длинах остальных девяти ребер. Тогда, мы полагаем

$$\frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}} = -\frac{\partial \alpha}{\partial l_{DE}} - \frac{\partial \beta}{\partial l_{DE}} - \frac{\partial \gamma}{\partial l_{DE}},$$

где каждая из производных в правой части берется при значении  $l_{DE}$ , при котором  $\omega_{DE} = 0$ .

Мы не формализуем здесь понятий “квантовое” и “классическое”. Соотношение (1) мы называем классическим, поскольку величины, которые оно связывает, не имеют квантового характера. В то же время, соотношение (1) заслуживает названия “квазиклассическое”, т.к. с помощью квазиклассического предельного перехода (используя формулу Понцано-Редже-Робертса [60, 64] и метод стационарной фазы) оно может быть получено из аналогичного соотношения для так называемых  $6j$ -символов.

Понятие  $6j$ -символа впервые появилось в работе Г. Рака [61], который определил их для упрощения вычислений в атомной спектроскопии. Примерно

в это же время Ю. Вигнер [73] дал более строгое определение  $6j$ -символа через разложение на неприводимые составляющие тензорного произведения представлений группы  $SU(2)$ . По сути,  $6j$ -символ — это скалярная функция от шести переменных, принимающих целые или полуцелые положительные значения.  $6j$ -символ обладает множеством симметрий, которые естественно связаны с симметриями обычного евклидова тетраэдра. Кроме того,  $6j$ -символ удовлетворяет уравнению пентагона (Биденгарна-Эллиотта).

В 1989 году А. Кириллов и Н. Решетихин [38] определили квантовый аналог  $6j$ -символа, используя представления квантовой обертывающей алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  взамен группы  $SU(2)$ , а в 1992 году В. Тураев и О. Виро [70] на основе квантового  $6j$ -символа определили инвариант 3-мерного многообразия, используя квантовый аналог уравнения пентагона.

Аналогично тому, как из уравнения пентагона для квантовых  $6j$ -символов получаются инварианты Тураева-Виро, геометрические инварианты можно построить на основе “квазиклассического” соотношения (1). Однако, в отличие от инвариантов Тураева-Виро, построение наших инвариантов естественно вести на языке накрытий и кручений ациклических комплексов, сопоставленных этим накрытиям.

Геометрические инварианты допускают многочисленные обобщения и модификации. Например, взамен трехмерного евклидова пространства можно использовать трехмерную сферу и рассматривать представления фундаментальной группы в группе  $SO(4)$ . Начало такой деятельности положено в работе Ю. Тэйлор и К. Вудворда [66]. Помимо евклидовой и сферической геометрий, оказывается возможным получить аналог уравнения пентагона (1) для дву-



мерной аффинной геометрии плоскости с группой изометрий  $SL(2, \mathbb{R})$  и затем, через “глобализацию” этой формулы, построить инвариант 3-мерных многообразий, см. работы [11, 13].

Кроме того, можно дополнительно “подкрутить” инвариант, введя в рассмотрение представления фундаментальной группы в группе автоморфизмов линейных пространств, возникающих при построении инварианта. Для линзовых пространств эта возможность исследована в работе [50].

Также сто́ит отметить, что некоторые формулы, используемые при построении инвариантов, весьма напоминают квазиклассический предел соотношений для квантовых объектов. Например, как уже отмечалось, соотношение (1) есть квазиклассическая асимптотика уравнения пентагона для  $6j$ -символов. Поэтому, вполне вероятно, что геометрические инварианты могут оказаться лишь пределами каких-то более общих квантовых структур. Более подробную информацию об этом можно найти в работе [45].

Основной целью настоящей работы является развитие теории геометрических инвариантов для многообразий, узлов и зацеплений, изучение их некоторых свойств и вычисление этих инвариантов для конкретных примеров.

Полученные в работе теоретические результаты являются новыми и могут быть использованы как в чистой математике для различения 3-многообразий и узлов, так и в математической физике, а именно, при построении новых топологических квантовых теорий поля.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на девять параграфов и списка литературы.

В первой главе мы занимаемся построением и вычислением геометриче-

ского инварианта для трехмерных многообразий. Построение в данном случае разбивается на следующие шаги.

- По заданной допустимой расцветке триангуляции многообразия  $M$  строим класс  $[\rho]$  эквивалентных представлений  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow E(3)$  фундаментальной группы многообразия в группе сохраняющих ориентацию изометрий трехмерного евклидова пространства, а также регулярное накрытие многообразия  $M$ , соответствующее ядру представления  $\rho \in [\rho]$ .
- Отображаем накрывающее пространство в трехмерное евклидово пространство в соответствии с действием группы  $\text{Im } \rho$ . Под этим мы понимаем следующее: вершины накрывающего пространства, принадлежащие одной орбите, переходят друг в друга под действием элементов группы  $\text{Im } \rho$ ; симплексы же ненулевой размерности переходят в выпуклые линейные оболочки образов соответствующих вершин. Вспомогательная теорема 1.1 из § 1.1 утверждает, что такое отображение согласовывается с допустимой расцветкой, заданной изначально.
- Определяем ациклический комплекс (§ 1.2), фиксированные базисы линейных пространств которого состоят из дифференциалов евклидовых величин — координат вершин, длин ребер и т.д. Инвариант многообразия (формула (1.21)) выражается через кручение этого ациклического комплекса и произведение объемов тетраэдров, принадлежащих фундаментальному семейству накрытия.

Разумеется, построенный таким способом инвариант, существенным образом зависит от представления  $\rho$  или точнее, от класса эквивалентных пред-

ставлений  $[\rho]$ . К примеру, для тривиального представления ( $\text{Im } \rho = 1$ ) компьютерные вычисления указывают на то, что наш инвариант выражается через первую группу гомологий многообразия  $H_1$  (гипотеза 1.18). В то же время, для абелевых (нетривиальных) представлений, по крайней мере для линзовых пространств и пространства  $S^2 \times S^1$ , инвариант выражается через  $H_1$  и кручение Райдемайстера (= максимальное абелево кручение в терминологии В.Г. Тураева [19]).

В параграфе 1.3 (теорема 1.20) показано, что геометрические инварианты обладают свойством мультипликативности относительно операции связного суммирования многообразий (при некоторых условиях на представления фундаментальных групп). Наконец, в § 1.4 мы проводим подробные вычисления инварианта для:

- линзовых пространств  $L(p, q)$  (в теореме 1.22 доказана общая формула для произвольных  $p$  и  $q$  и нетривиального представления фундаментальной группы  $\mathbb{Z}_p$ );
- октаэдрического многообразия  $S^3/P_{24}$  и *неабелева* представления его фундаментальной группы;
- пространства  $S^2 \times S^1$  и нетривиального представления его *бесконечной* фундаментальной группы.

Глава 2 посвящена теории геометрических инвариантов для узлов и зацеплений. Основные этапы построения инварианта в данном случае выглядят следующим образом.

- По заданному ориентированному зацеплению  $L$  строим симплициальное

разбиение трехмерной сферы  $S^3$  такое, что зацепление составлено из ребер этого симплициального разбиения. В § 2.1 формулируется общий алгоритм построения такого разбиения для произвольного  $L$ .

- По заданному представлению  $\rho: \pi L \rightarrow \text{SO}(3)$  группы зацепления в группе  $\text{SO}(3)$  строим разветвленное вдоль  $L$  накрытие трехмерной сферы, соответствующее ядру представления.
- Отображаем накрывающее пространство в трехмерное евклидово пространство в соответствии с действием группы  $\text{Im } \rho$  в полной аналогии со случаем 3-многообразий.
- Строим алгебраический комплекс (§ 2.2), фиксированные базисы линейных пространств которого состоят из дифференциалов евклидовых величин — координат вершин, длин ребер и т.д. Наконец, в предположении ацикличности этого комплекса определяем инвариант зацепления (формула (2.3)) через кручение, произведение длин ребер, принадлежащих зацеплению, произведение объемов тетраэдров, а также, через параметры представления  $\rho$ .

В § 2.3 мы проводим подробные вычисления инварианта для трилистника в случае абелева и неабелева представлений его группы в  $\text{SO}(3)$ . Здесь же мы формулируем гипотезу о том, что для абелевых представлений группы зацепления наш инвариант выражается через полином Александера зацепления (гипотеза 2.6).

В третьей завершающей главе диссертации мы строим обобщение нашего инварианта, которое можно назвать “скрученным” геометрическим инвари-

антом, т.к. идея построения здесь во многом схожа с идеей построения скрученного полинома Александра. Напомним, что впервые скрученный полином Александра был определен в работах С. Лина [49] и М. Вады [71] и впоследствии исследовался многими авторами, включая Т. Китано [40, 41], П. Кирка и К. Ливингстона [39].

В § 3.1 проведено построение “скрученной” версии инварианта для 3-многообразий. В конце этого параграфа мы в качестве примера проводим вычисления для многообразия  $S^2 \times S^1$ , формула (3.10).

В § 3.2 мы строим “скрученный” геометрический инвариант для зацеплений и проводим соответствующие вычисления для трилистника, формула (3.16). На этом примере показано, что “скрученный” геометрический инвариант выражается через скрученный полином Александра (замечание 3.1).

На защиту выносятся следующие результаты:

- теорема об ацикличности геометрического комплекса (теорема 1.11);
- теорема о мультипликативности геометрического инварианта относительно операции связного суммирования многообразий (теорема 1.20);
- теорема о значении геометрического инварианта для трехмерных линзовых пространств (теорема 1.22);
- метод построения “скрученной” версии геометрического инварианта трехмерных многообразий и зацеплений (глава 3).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [13, 46, 50, 51], из них работы [13, 46] выполнены совместно с научным руководителем.

Результаты, приводимые в диссертации, докладывались

- на международной конференции “Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств”, посвященной столетию Л.В. Келдыш (Москва, 2004 г.);
- на региональной молодежной школе-конференции “Проблемы теоретической и прикладной математики” (Екатеринбург, 2005 г., 2007 г.);
- на ежегодных научно-технических конференциях Южно-Уральского государственного университета (Челябинск, 2003–2006 гг.);
- на семинарах кафедры компьютерной топологии и алгебры Челябинского государственного университета под руководством профессора, чл.-корр. РАН С.В. Матвеева (Челябинск, 2003–2005 гг.).

# Глава 1. Геометрические инварианты трехмерных многообразий

## § 1.1. Допустимая расцветка и отображение $\Gamma: \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Пусть  $M$  — связное замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие. Пусть  $T$  — его *триангуляция*, т.е. множество попарно непересекающихся тетраэдров  $\Delta$  вместе с семейством гомеоморфизмов  $\Phi$ , отображающих множество двумерных граней тетраэдров на себя таким образом, что  $\Delta/\Phi$  гомеоморфно  $M$ . Заметим, что данное определение позволяет рассматривать триангуляции многообразий, в которых 3-симплекс может не определяться однозначно множеством своих вершин, и более того, симплексу любой размерности разрешается входить несколько раз в границу симплекса большей размерности.

Как известно из теории накрытий, для каждой подгруппы  $H$  фундаментальной группы  $\pi_1(M)$  многообразия  $M$  найдется такое накрытие  $p: \tilde{M} \rightarrow M$ , что индуцированный гомоморфизм  $p_*: \pi_1(\tilde{M}) \rightarrow H$  является изоморфизмом. То есть, существует взаимно-однозначное соответствие между накрытиями над данной базой и подгруппами фундаментальной группы базы, рассматриваемыми с точностью до эквивалентности.

Накрытие, соответствующее тривиальной подгруппе, называется *универсальным*. Универсальное накрывающее пространство  $\tilde{M}$  является *односвязным* ориентируемым трехмерным многообразием. При этом, группа  $\pi_1(M)$  действует на  $\tilde{M}$  свободно и транзитивно и  $\tilde{M}/\pi_1(M) \cong M$ .

Симплициальная структура  $T$  многообразия  $M$  естественным образом ин-

дуцирует симплициальную структуру  $\tilde{T}$  накрывающего пространства  $\tilde{M}$ : каждый симплекс из  $T$  можно поднять в  $\tilde{T}$  (вообще говоря многими разными способами в соответствии с действием группы  $\pi_1(M)$ ).

Сопоставим каждому ребру  $e_{ij} \in T$ , соединяющему вершины  $i$  и  $j$ , вещественное число  $\lambda_{ij} > 0$  так, что для каждого тетраэдра комплекса  $T$  с ребрами  $(e_{ij}, e_{ik}, e_{il}, e_{jk}, e_{jl}, e_{kl})$  выполняется

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda_{ij}^2 & \lambda_{ik}^2 & \lambda_{il}^2 \\ 1 & \lambda_{ij}^2 & 0 & \lambda_{jk}^2 & \lambda_{jl}^2 \\ 1 & \lambda_{ik}^2 & \lambda_{jk}^2 & 0 & \lambda_{kl}^2 \\ 1 & \lambda_{il}^2 & \lambda_{jl}^2 & \lambda_{kl}^2 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (1.1)$$

Напомним, что это условие гарантирует существование невырожденного евклидового тетраэдра с длинами ребер  $(\lambda_{ij}, \lambda_{ik}, \lambda_{il}, \lambda_{jk}, \lambda_{jl}, \lambda_{kl})$ , единственного с точностью до изометрий, см. [2].

Сопоставим каждому тетраэдру  $\tau \in T$  знак  $+$  или  $-$ . Для каждого ребра  $a$ , принадлежащего  $i$ -ому тетраэдру комплекса  $T$ , обозначим  $\varphi_a^{(i)}$  внутренний двугранный угол в этом ребре. Этот двугранный угол является функцией  $\lambda_{\dots}$  и берется с тем знаком, который приписан  $i$ -ому тетраэдру.

**Определение 1.1.** Углом дефекта  $\omega_a$  в ребре  $a$  называется величина

$$\omega_a = - \sum_i \varphi_a^{(i)} \pmod{2\pi},$$

где сумма берется по всем тетраэдрам, сосредоточенным вокруг ребра  $a$ . Знак модуля означает, что  $\omega_a \in [0; 2\pi)$ .

Будем говорить, что на комплексе  $T$  задана *допустимая расцветка*, если каждому ребру  $e_{ij} \in T$  сопоставлено число  $\lambda_{ij}$  так, что выполнено условие (1.1),



а всем тетраэдрам из  $T$  знаки сопоставлены таким образом, что при каждом ребре угол дефекта тождественно равен нулю.

Заметим, что если на  $T$  задана допустимая расцветка, то и на симплициальном комплексе  $\tilde{T}$  для универсальной накрывающей  $\tilde{M}$  очевидным образом индуцируется допустимая расцветка: всем ребрам из прообраза некоторого ребра  $e_{ij} \in T$  сопоставляется одно и то же число  $\lambda_{ij}$ , а всем тетраэдрам из прообраза некоторого тетраэдра  $\tau \in T$  сопоставляется тот же знак, что и  $\tau$ .

**Теорема 1.1.** *Пусть  $\tilde{T}$  — симплициальный комплекс для универсального накрывающего пространства  $\tilde{M}$ . Пусть на  $\tilde{T}$  задана допустимая расцветка. Тогда, существует непрерывное отображение  $\Gamma: \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$  такое, что  $l_{ij} = \lambda_{ij}$ ,  $\forall i, j$ , где  $l_{ij}$  — длина ребра  $\Gamma(e_{ij})$ . Любое другое отображение  $\Gamma': \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$  для той же самой допустимой расцветки получается из  $\Gamma$  сохраняющей ориентацию изометрией пространства  $\mathbb{R}^3$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\tau_1$  — некоторый выделенный тетраэдр комплекса  $\tilde{T}$ ,  $(\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{34})$  — допустимая расцветка его ребер. Обозначим  $\Gamma_1: \tau_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  произвольное вложение этого тетраэдра в  $\mathbb{R}^3$  такое, что  $l_{ij} = \lambda_{ij}$ . Пусть  $\tau_2$  — смежный с  $\tau_1$  тетраэдр, т.е. имеющий с ним общую 2-мерную грань. Тогда, очевидно, что существует вложение  $\Gamma_2: \tau_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  такое, что  $\Gamma_2 = \Gamma_1$  на  $\tau_2 \cap \tau_1$ . Это вложение единственно: тетраэдры  $\Gamma_1(\tau_1)$  и  $\Gamma_2(\tau_2)$  находятся по одну сторону (по разные стороны) от их общей двумерной грани, если знаки тетраэдров  $\tau_1$  и  $\tau_2$  одинаковые (различные). Мы будем говорить, что отображение  $\Gamma_2$  продолжает отображение  $\Gamma_1$  с помощью тетраэдра  $\tau_2$ .

Возьмем произвольный тетраэдр  $\tau_i \in \tilde{T}$  и рассмотрим для него последовательность попарно смежных тетраэдров, начиная с  $\tau_1$ , т.е. последовательность

$s_i = (\tau_1, \dots, \tau_i)$ , в которой для каждой пары  $(\tau_j, \tau_{j+1})$  пересечение  $\tau_j \cap \tau_{j+1}$  есть 2-симплекс для всех  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Тогда, определим отображение  $\Gamma_{s_i}: \tau_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  как продолжение отображения  $\Gamma_1$  с помощью последовательности  $s_i$ .

**Лемма 1.2.** *Отображение  $\Gamma_{s_i}$  не зависит от выбора последовательности  $s_i$ , т.е. если  $s'_i$  — любая другая последовательность смежных тетраэдров, соединяющих  $\tau_1$  и  $\tau_i$ , то  $\Gamma_{s_i} = \Gamma_{s'_i} = \Gamma_i$ .*

*Доказательство.* Пусть у нас есть последовательность  $s_i$ , соединяющая тетраэдры  $\tau_1$  и  $\tau_i$ . Мы будем представлять ее геометрически как заданную ломаной линией, каждый прямолинейный отрезок которой соединяет барицентры двух смежных тетраэдров, начинающейся в барицентре первого тетраэдра и кончающейся в барицентре последнего. Мы должны показать, что если имеется еще одна последовательность  $s'_i$ , соединяющая тетраэдры  $\tau_1$  и  $\tau_i$ , то  $\Gamma_1 = \Gamma'_1$ , где  $\Gamma'_1: \tau_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — продолжение отображения  $\Gamma_1$  с помощью замкнутого пути  $s_i \circ (s'_i)^{-1}$ .

Напомним, что на множестве ребер из  $\tilde{T}$  задана допустимая расцветка. Отсюда, в частности, следует, что  $\lambda_{ij}$  и знаки тетраэдров выбраны так, что углы дефекта во всех ребрах тождественно равны нулю. Пусть вокруг ребра  $e$  сосредоточены  $n$  тетраэдров  $\tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_n}$ , причем тетраэдры  $\tau_{k_i}$  и  $\tau_{k_{i+1}}$  являются смежными для всех  $i$ . Обозначим  $\alpha$  замкнутый путь  $(\tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_n}, \tau_{k_1})$ . Из того, что угол дефекта в ребре  $e$  равен нулю следует, что  $\Gamma_{k_1} = \Gamma'_{k_1}$ , где  $\Gamma'_{k_1}: \tau_{k_1} \rightarrow \mathbb{R}^3$  — продолжение отображения  $\Gamma_{k_1}$  с помощью  $\alpha$ .

Обозначим  $\tilde{T}_2^*$  — 2-мерный остов дуального по Пуанкаре клеточного разбиения для  $\tilde{T}$ . Напомним, что 0-мерные клетки комплекса  $\tilde{T}_2^*$  состоят из барицентров всех тетраэдров из  $\tilde{T}$ ; 1-мерные — соединяют два барицентра тогда и

только тогда, когда соответствующие тетраэдры являются смежными; каждая 2-мерная клетка из  $\tilde{T}_2^*$  соответствует кластеру из тетраэдров вокруг каждого ребра из  $\tilde{T}$ .

**Лемма 1.3.**  $\pi_1(\tilde{T}_2^*) \cong \pi_1(\tilde{T}) \cong 1$ .

*Доказательство* следует из теоремы Ван-Кампена, а также из того факта, что полный дуальный по Пуанкаре клеточный комплекс  $\tilde{T}^*$  гомеоморфен  $\tilde{T}$ .  $\square$

Из леммы 1.3 следует, что замкнутый путь  $s_i \circ (s'_i)^{-1}$  представляется в виде конечного произведения путей вида  $\alpha$ . Отсюда получаем утверждение леммы 1.2.  $\square$

Таким образом, для каждого тетраэдра  $\tau_i \in \tilde{T}$  мы имеем вложение  $\Gamma_i: \tau_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ , причем по построению очевидно, что два вложения  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_j$  согласованы на пересечении  $\tau_i \cap \tau_j, \forall i, j$ . Теперь определим отображение  $\Gamma: \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$  посредством

$$\Gamma(x) = \Gamma_i(x) \iff x \in \tau_i, \forall i.$$

Для того, чтобы завершить доказательство теоремы 1.1, нам понадобится следующий простой результат из общей топологии.

**Лемма 1.4.** Пусть  $X = A \cup B$ , где  $A$  и  $B$  — замкнутые подпространства в  $X$ . Пусть имеются непрерывные отображения  $f: A \rightarrow Y$  и  $g: B \rightarrow Y$ . Если  $f = g$  на  $A \cap B$ , то функция  $h$ , определенная по формуле

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$

является непрерывной.

*Доказательство.* Пусть  $C$  — замкнутое подмножество в  $Y$ . Из непрерывности  $f$  и  $g$ , а также из того, что  $A$  и  $B$  — замкнутые подмножества в  $X$  следует, что  $f^{-1}(C)$  и  $g^{-1}(C)$  — замкнуты в  $X$ . Поэтому,  $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$  — также замкнуто в  $X$ .

Пусть  $y \in Y$  и  $V$  — окрестность точки  $y$ . Тогда,  $h^{-1}(V)$  — окрестность точки  $x = h^{-1}(y)$ . Поэтому, существует окрестность  $U$  точки  $x$  такая, что  $U \subset h^{-1}(V)$ . Отсюда получаем:  $h(U) \subset h(h^{-1}(V)) = V$ . Это и означает непрерывность отображения  $h$ .  $\square$

Из леммы 1.4, а также из определения отображения  $\Gamma$  следует его непрерывность.

Последнее утверждение теоремы связано с произволом в выборе вложения  $\Gamma_1$  выделенного тетраэдра  $\tau_1$ . Пусть  $\Gamma'_1$  — любое другое вложение  $\tau_1$  в  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим  $E(3)$  группу сохраняющих ориентацию движений пространства  $\mathbb{R}^3$ . Тогда, существует элемент  $h \in E(3)$  такой, что  $\Gamma'_1(\tau_1) = h\Gamma_1(\tau_1)$ . Из построения отображения  $\Gamma$  получаем:  $\Gamma'(\tilde{T}) = h\Gamma(\tilde{T})$ . Отсюда, в частности, следует, что  $\Gamma$  не зависит от выбора выделенного тетраэдра  $\tau_1$  с точностью до умножения на элемент группы  $E(3)$ . Теорема 1.1 доказана.  $\square$

Как уже говорилось выше, фундаментальная группа  $\pi_1(M)$  действует на  $\tilde{T}$  свободно и транзитивно. Пусть  $\tilde{\tau}$  и  $\tilde{\tau}'$  — прообразы одного и того же тетраэдра  $\tau \in T$  относительно проекции накрытия. Тогда, найдется некоторый элемент  $g \in \pi_1(M)$ , что  $\tilde{\tau}' = g\tilde{\tau}$ . Далее, поскольку множества длин ребер тетраэдров  $\tilde{\tau}$  и  $\tilde{\tau}'$  совпадают, то найдется такой элемент  $h \in E(3)$ , что  $\Gamma(\tilde{\tau}') = h\Gamma(\tilde{\tau})$ . Таким образом, определено отображение  $\rho: g \mapsto h$ , причем, очевидно, что  $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ , т.е. мы имеем представление  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow E(3)$ .

Пусть  $\Gamma' = h \circ \Gamma$ , где  $h \in E(3)$ . Тогда,  $\rho' = h^{-1} \circ \rho \circ h$ , где  $\rho'$  — представление, соответствующее отображению  $\Gamma'$ . Напомним, что представления  $\rho, \rho': \pi_1(M) \rightarrow E(3)$  в этом случае называются *эквивалентными*. Таким образом, справедливо следующее

**Предложение 1.5.** *Каждой допустимой расцветке комплекса  $\tilde{T}$  соответствует единственный класс  $[\rho]$  эквивалентных представлений группы  $\pi_1(M)$  в  $E(3)$ .*

Обратно, пусть задано некоторое представление

$$\rho: \pi_1(M) \rightarrow E(3) \quad (1.2)$$

фундаментальной группы многообразия  $M$  в группе сохраняющих ориентацию движений трехмерного евклидова пространства. Тогда можно построить отображение  $\Gamma_\rho: \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$  следующим образом.

Во-первых, заметим, что любой тетраэдр, входящий в симплициальное разбиение *ориентируемого* пространства  $\tilde{M}$ , можно согласованно ориентировать, т.е. упорядочить его вершины с точностью до четных перестановок. Например, мы считаем, что упорядочение вершин двух смежных тетраэдров вида  $ABCD$  и  $EABC$  является согласованно ориентированным. Введем на множестве всех тетраэдров из  $\tilde{T}$  согласованную ориентацию.

**Определение 1.2.** *Фундаментальным семейством симплексов триангуляции покрывающего пространства  $\tilde{T}$  называется такое семейство  $\mathcal{F}$  симплексов из  $\tilde{T}$ , что над каждым симплексом из  $T$  лежит в точности один симплекс из этого семейства.*

Фиксируем фундаментальное семейство  $\mathcal{F}$  для  $\tilde{T}$ .

Пусть  $v$  — вершина, принадлежащая  $T$ ,  $\tilde{v} \in \mathcal{F}$  — представитель ее прообраза из фундаментального семейства. Тогда мы помещаем орбиту точки  $\tilde{v}$ , т.е. множество  $\{g\tilde{v} \mid g \in \pi_1(M)\}$ , в  $\mathbb{R}^3$  так, что если  $\tilde{v}_2 = g\tilde{v}_1$ , где  $g \in \pi_1(M)$ , то  $\Gamma_\rho(\tilde{v}_2) = \rho(g)\Gamma_\rho(\tilde{v}_1)$ . Таким образом, каждой вершине из симплициального разбиения  $T$  мы ставим в соответствие множество точек в  $\mathbb{R}^3$ , координаты которых связаны преобразованиями из группы  $E(3)$ .

*Замечание 1.1.* Все вершины фундаментального семейства  $\mathcal{F}$  помещаются в  $\mathbb{R}^3$  произвольным образом. Однако, мы всегда будем требовать, чтобы для конфигурации этих вершин в  $\mathbb{R}^3$  были выполнены следующие два условия общего положения:

- объемы всех тетраэдров из  $\Gamma(\mathcal{F})$  должны принимать ненулевые значения;
- ранг матрицы  $\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial l_j}\right)$  принимает максимально возможное значение в точке  $\omega_i = 0, \forall i$ ; здесь  $\omega_i$  — угол дефекта в  $i$ -ом ребре,  $l_j$  — длина  $j$ -го ребра,  $i$  и  $j$  пробегают все ребра из  $\mathcal{F}$ .

Далее, каждый симплекс  $\sigma^k \in \tilde{T}$  ненулевой размерности  $k$  при отображении  $\Gamma_\rho$  переходит в выпуклую линейную оболочку образов его вершин в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. если  $v_0, \dots, v_k$  — множество вершин симплекса  $\sigma^k$ , то  $\Gamma_\rho(\sigma^k) = \sum_{i=0}^k m_i \Gamma_\rho(v_i)$ , где  $m_0 + \dots + m_k = 1$  и  $m_i \geq 0, \forall i$ .

Таким образом, каждому ребру  $e \in \tilde{T}$  может быть поставлено в соответствие вещественное число — евклидова длина его образа  $\Gamma_\rho(e) \in \mathbb{R}^3$ , а каждому 3-симплексу  $\tau \in \tilde{T}$  — объем евклидова тетраэдра  $\Gamma_\rho(\tau)$ . Аналогичным образом можно говорить, скажем, о двугранных углах между 2-симплексами в триангуляции.

При отображении  $\Gamma_\rho$ , ориентация данного тетраэдра либо совпадает с фиксированной ориентацией пространства  $\mathbb{R}^3$ , либо нет. В первом случае его объем и все двугранные углы, принадлежащие ему, мы берем со знаком  $+$ , во втором — со знаком  $-$ .

Таким образом, мы получаем допустимую расцветку на комплексе  $\tilde{T}$ : каждому ребру приписывается длина его образа относительно отображения  $\Gamma_\rho$ , каждому тетраэдру — знак объема его образа в  $\mathbb{R}^3$ .

Перед тем как приступить к построению инварианта, нам необходимо получить несколько формул евклидовой геометрии, а также напомнить некоторые ключевые определения из теории алгебраических комплексов [53, 19].

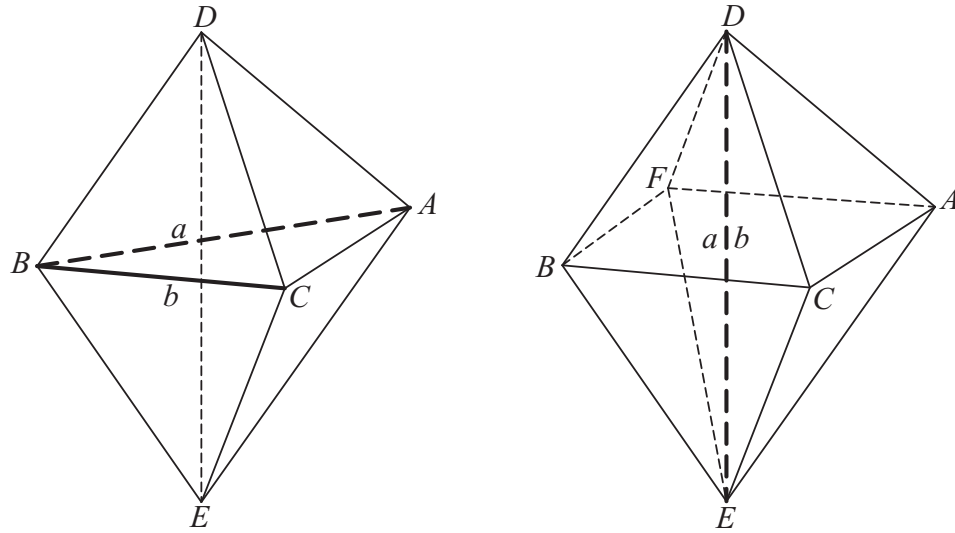
НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ. Нам понадобятся формулы для производных  $\frac{\partial \omega_a}{\partial l_b}$  от угла дефекта в ребре  $a$  по длине ребра  $b$ , взятых при условии, что длины всех ребер, кроме длины ребра  $b$ , фиксированы. Ясно, что ненулевые производные получаются только если  $a$  и  $b$  принадлежат одному и тому же тетраэдру. Рассмотрим несколько случаев.

**1-й случай.** Ребра  $a = AB$  и  $b = CD$  — скрещивающиеся ребра тетраэдра  $ABCD$ , и в триангуляции нет других тетраэдров, содержащих оба ребра  $a$  и  $b$ :

$$\frac{\partial \omega_{AB}}{\partial l_{CD}} = -\frac{l_{AB} l_{CD}}{V_{ABCD}}, \quad (1.3)$$

где  $V_{ABCD}$  — умноженный на 6 объем тетраэдра  $ABCD$ . Для доказательства применим трехмерный аналог теоремы косинусов:

$$l_{CD}^2 = l_{CK}^2 + l_{DL}^2 + l_{KL}^2 - 2l_{CK}l_{DL} \cos \varphi_{AB},$$



(a) Иллюстрация к формуле (1.4)

(b) Иллюстрация к формуле (1.7)

Рис. 1.1.

где  $K$  — проекция вершины  $C$  на ребро  $AB$ ,  $L$  — проекция вершины  $D$  на ребро  $AB$ . Дифференцируя обе части по  $l_{CD}$  и учитывая соотношение  $V_{ABCD} = l_{CK}l_{DL}l_{AB} \sin \varphi_{AB}$ , получим:

$$\frac{\partial \varphi_{AB}}{\partial l_{CD}} = \frac{l_{AB}l_{CD}}{V_{ABCD}}.$$

Отсюда и из определения угла дефекта получаем (1.3).

**2-й случай.** Ребра  $a = AB$  и  $b = BC$  принадлежат общей грани двух смежных тетраэдров и, снова, нет больше ни одного тетраэдра, содержащего сразу оба ребра  $a$  и  $b$  (рис. 1.1(а)):

$$\frac{\partial \omega_{AB}}{\partial l_{BC}} = l_{AB}l_{BC} \frac{V_{CAED}}{V_{ABCD}V_{EABC}}. \quad (1.4)$$

Для доказательства этой формулы мы добавим ребро  $DE$  на рисунке 1.1(а). Предположим, что длины  $l_{BC}$  и  $l_{DE}$  на рисунке 1.1(а) могут меняться, а длины остальных восьми ребер фиксированы. Тогда, используя формулы



вида (1.3), нетрудно получить:

$$\frac{\partial l_{DE}}{\partial l_{BC}} = -\frac{l_{BC}}{l_{DE}} \frac{V_{CAED} V_{ABED}}{V_{ABCD} V_{EABC}}. \quad (1.5)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \omega_{AB}}{\partial l_{BC}} = \frac{\partial \omega_{AB}}{\partial l_{DE}} \frac{\partial l_{DE}}{\partial l_{BC}} = l_{AB} l_{BC} \frac{V_{CAED}}{V_{ABCD} V_{EABC}}.$$

**3-й случай.** Ребро  $a = b = DE$  является общим для ровно трех примыкающих к нему тетраэдров  $ABED$ ,  $BCED$  и  $CAED$ , причем ни один из этих тетраэдров не содержит этого ребра дважды:

$$\frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}} = -l_{DE}^2 \frac{V_{ABCD} V_{EABC}}{V_{ABED} V_{BCED} V_{CAED}}. \quad (1.6)$$

Мы уже выписывали это равенство во введении (формула (1)). Для доказательства, предположим, что длины  $l_{BC}$  и  $l_{DE}$  на рисунке 1.1(а) могут меняться, а длины остальных восьми ребер фиксированы. Тогда

$$0 \equiv \frac{d\omega_{DE}}{dl_{DE}} = \frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}} + \frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{BC}} \cdot \frac{\partial l_{BC}}{\partial l_{DE}} = \frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}} + \frac{l_{BC} l_{DE}}{V_{BCED}} \cdot \frac{l_{DE}}{l_{BC}} \frac{V_{ABCD} V_{EABC}}{V_{CAED} V_{ABED}},$$

где мы воспользовались формулами (1.3) и (1.5). Отсюда получаем формулу (1.6).

**4-й случай.** Ребро  $a = b = DE$  является общим для  $> 3$  примыкающих к нему тетраэдров, причем ни один из тетраэдров не содержит этого ребра дважды.

Мы выпишем формулу только для случая, изображенного на рисунке 1.1(б), т.е. когда вокруг ребра  $DE$  сосредоточено четыре тетраэдра (обобщение на произвольное количество тетраэдров очевидно):

$$\frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}} = -\frac{l_{DE}^2}{6} \left( \frac{V_{ABCD} V_{EABC}}{V_{ABED} V_{BCED} V_{CAED}} + \frac{V_{AFBD} V_{EAFB}}{V_{AFED} V_{FBED} V_{BAED}} \right). \quad (1.7)$$

Здесь в правой части стоит правая часть (1.6) плюс аналогичное слагаемое, полученное из нее заменой  $B \rightarrow F$ ,  $C \rightarrow B$ . Формула (1.7) получается, если мы проведем на рисунке 1.1(b) диагональ  $AB$  и применим формулу (1.6) к каждой из фигур  $ABCDE$  и  $ABFDE$ . Складывая углы дефекта в  $DE$  для каждой из этих фигур, мы очевидно получим угол дефекта  $\omega_{DE}$  для всей фигуры  $ABCFDE$ .

**5-й случай.** На самом деле наше определение триангуляции допускает такие склейки граней тетраэдров, при которых могут реализовываться различные комбинации из перечисленных возможностей. Точнее, ребро  $b$  может оказаться

- противоположащим ребру  $a$  (1-й случай), причем сразу в нескольких тетраэдрах;
- принадлежащим общей с  $a$  двумерной грани (2-й случай), причем не одной;
- совпадающим с  $a$  (как в третьем и четвертом случаях),

и эти возможности (как показывают примеры) не исключают друг друга. Таким образом, может быть сразу несколько “путей влияния” дифференциала  $dl_b$  на дифференциал  $d\omega_a$  и для нахождения производной  $\frac{\partial \omega_a}{\partial b}$  необходимо суммировать выражения, соответствующие этим путям.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЦИКЛИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА И КРУЧЕНИЯ.** Пусть  $C_0, C_1, \dots, C_n$  — конечномерные векторные пространства над полем вещественных или комплексных чисел с фиксированными базисами и  $f_i: C_{i+1} \rightarrow C_i$  — линей-

ные отображения между ними, которые мы будем отождествлять с матрицами.

**Определение 1.3.** Последовательность векторных пространств и отображений

$$C = (0 \rightarrow C_n \xrightarrow{f_{n-1}} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{f_0} C_0 \rightarrow 0) \quad (1.8)$$

называется *комплексом*, если  $\text{Im } f_i \subset \text{Ker } f_{i-1}$  для всех  $i = 1, \dots, n-1$ . Это условие эквивалентно тому, что  $f_{i-1}f_i = 0$ .

**Определение 1.4.** Пространство  $H_i(C) = \text{Ker } f_{i-1} / \text{Im } f_i$  называется  *$i$ -ой гомологией* комплекса  $C$ .

**Определение 1.5.** Комплекс  $C$  называется *ациклическим*, если  $H_i(C) = 0$  для всех  $i$ . Это условие эквивалентно тому, что  $\text{rank } f_{i-1} = \dim C_i - \text{rank } f_i$ .

Пусть последовательность (1.8) является ациклическим комплексом. Пусть  $\mathcal{C}_i$  — упорядоченное множество базисных векторов в пространстве  $C_i$ , и  $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{C}_i$  — подмножество базисных векторов, принадлежащих пространству  $\text{Im } f_i$ .

Обозначим  $\mathcal{B}_i f_i$  невырожденную матрицу перехода от базиса в пространстве  $\text{Coker } f_{i+1} = C_{i+1} / \text{Im } f_{i+1}$  к базису в пространстве  $\text{Im } f_i$ . В силу ациклическости комплекса, такая матрица существует и является квадратной. Таким образом,  $\mathcal{B}_i f_i$  есть базисный минор матрицы  $f_i$ , полученный вычеркиванием строк, соответствующих векторам из множества  $\mathcal{B}_{i+1}$  и столбцов, соответствующих векторам из множества  $\mathcal{C}_i \setminus \mathcal{B}_i$ .

**Определение 1.6.** Величина, определяемая по формуле

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^{n-1} (\det \mathcal{B}_i f_i)^{(-1)^{i+1}}, \quad (1.9)$$

называется *кручением* ациклического комплекса  $C$ .

**Теорема 1.6** ([19]). *С точностью до знака кручение  $\tau(C)$  не зависит от выбора подмножеств  $\mathcal{B}_i$ .*

*Замечание 1.2.* Кручение  $\tau(C)$  зависит от выбора базисов в пространствах  $C_i$ . Если в ациклическом комплексе  $C$  в каждом пространстве  $C_i$  сделать невырожденную замену базиса с матрицей  $A_i$ , то кручение умножится на величину

$$\prod_{i=0}^n (\det A_i)^{(-1)^{i+1}}.$$

Введем понятие невырожденной  $\tau$ -цепи, следуя В.Г. Тураеву [19].

**Определение 1.7.** Пусть  $\alpha_i$  — некоторый набор базисных векторов пространства  $C_i$  комплекса (1.8). Пусть  $S_i$  — подматрица матрицы  $f_i$ , образованная такими элементами  $a_{jk}^i$ , что  $j$  соответствует некоторому элементу из  $\alpha_{i+1}$  и  $k$  соответствует некоторому элементу из  $\bar{\alpha}_i$ . Набор множеств  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  называется *невырожденной  $\tau$ -цепью*, если для всех  $i$  матрицы  $S_i$  являются квадратными и невырожденными.

**Лемма 1.7.** *Комплекс (1.8) является ациклическим тогда и только тогда, когда в нем найдется невырожденная  $\tau$ -цепь.*

*Доказательство.* Пусть комплекс (1.8) является ациклическим. Тогда набор множеств  $(\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{n-1}, C_n)$  образует невырожденную  $\tau$ -цепь.

Обратно, пусть существует невырожденная  $\tau$ -цепь  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Из того, что (1.8) является комплексом, следует, что  $\text{rank } f_{i-1} + \text{rank } f_i \leq \dim C_i$ . С другой стороны, из того, что  $S_i$  — квадратная невырожденная матрица, следует, что

$$\text{rank } f_i \geq \#\alpha_{i+1} = \dim C_i - \#\alpha_i = \dim C_i - \dim C_{i-1} + \dots + (-1)^i \dim C_0.$$

Откуда,

$$\text{rank } f_{i-1} + \text{rank } f_i \geq \dim C_i.$$

Отсюда получаем равенство  $\text{rank } f_{i-1} + \text{rank } f_i = \dim C_i$ , которое и означает ацикличность комплекса (1.8).  $\square$

**ПРОСТРАНСТВО  $E(3)$ -ПРЕДСТАВЛЕНИЙ.** Рассмотрим пространство всех гомоморфизмов  $\text{Hom}(\pi_1(M), E(3))$  с компактно-открытой топологией, где  $\pi_1(M)$  наделяется дискретной топологией, а  $E(3) \cong \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^3$  — обычной топологией многообразия  $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^3$ . Поскольку  $\pi_1(M)$  — конечно-порожденная группа, то топологию на  $\text{Hom}(\pi_1(M), E(3))$  можно задать предбазой<sup>1</sup>, состоящей из всех подмножеств  $\mathcal{U}_{g,V} = \{\rho: \pi_1(M) \rightarrow E(3) \mid \rho(g) \in V\}$  пространства  $\text{Hom}(\pi_1(M), E(3))$ , по одному для каждого  $g \in \pi_1(M)$  и каждого открытого подмножества  $V \subset E(3)$ .

Так как центр группы  $E(3)$  тривиален, то она свободно действует на  $\text{Hom}(\pi_1(M), E(3))$  сопряжениями: для любого  $h \in E(3)$  и для любого представления  $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(M), E(3))$  мы можем определить  $h \cdot \rho = h^{-1} \circ \rho \circ h$ . Определим топологическое пространство  $E(3)$ -представлений группы  $\pi_1(M)$  как пространство

$$R(M, E(3)) = \text{Hom}(\pi_1(M), E(3))/E(3),$$

состоящее из классов эквивалентных представлений  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow E(3)$ , и индуцированной на нем фактор-топологией.

Пространство  $\text{Hom}(\pi_1(M), E(3))$  можно превратить в *вещественное алгебраическое множество* следующим образом. Рассмотрим конечное задание

---

<sup>1</sup>Семейство  $S$  множеств называется *предбазой* топологии если семейство всевозможных конечных пересечений элементов из  $S$  образует базу топологии.

фундаментальной группы:

$$\pi_1(M) = \{t_1, \dots, t_\nu \mid r_1, \dots, r_\mu\}. \quad (1.10)$$

Каждое представление  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{E}(3)$  однозначно определяется образами  $\rho(t_k)$ , представляемых векторами в  $\mathbb{R}^9$ :

$$t_k \mapsto (e^{i\theta_k}, e^{i\varphi_k}, e^{i\psi_k}; x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^9,$$

где  $(\theta_k, \varphi_k, \psi_k)$  — углы Эйлера, параметризующие группу  $\mathbf{SO}(3)$ . Таким образом, мы получаем включение  $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbf{E}(3)) \rightarrow \mathbb{R}^{9\nu}$ . Каждому соотношению  $r_j$  в копредставлении (1.10) соответствует некоторое семейство многочленов в  $\mathbb{R}^{9\nu}$ . Отсюда следует, что пространство  $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbf{E}(3))$  можно представлять как подмножество в  $\mathbb{R}^{9\nu}$ , заданное системой вещественных полиномиальных уравнений, т.е. вещественное алгебраическое множество.

Напомним некоторые факты из алгебраической геометрии, следуя [21]. Пусть пространство  $X \subset \mathbb{R}^n$  определяется системой полиномиальных уравнений:  $F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Определение 1.8.** Точка  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in X$  называется *гладкой* размерности  $d$ , где  $0 \leq d \leq n$ , если  $x^0$  имеет окрестность  $U$  в  $\mathbb{R}^n$  такую, что  $X \cap U = V \cap U$ , где  $V$  — множество решений системы  $F_1(x) = \dots = F_{n-d}(x) = 0$ , и матрица размера  $n \times (n - d)$ , состоящая из частных производных  $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ , в точке  $x^0$  имеет ранг  $n - d$ .

**Теорема 1.8** ([21]). *Множество гладких точек пространства  $X$  открыто.*

Пусть  $x^0$  — гладкая точка пространства  $X$  размерности  $d$ . По теореме 1.8, найдется окрестность  $U$  точки  $x^0$  целиком состоящая из гладких точек той же

размерности. Применяя теорему о неявной функции, мы можем параметризовать точки в  $U$  через  $d$  вещественных координат и тем самым наделить  $U$  структурой гладкого подмногообразия размерности  $d$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.9.** Представление  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{E}(3)$  называется *регулярным*, если  $\rho$  является гладкой точкой пространства  $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbf{E}(3))$ .

Таким образом, в  $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbf{E}(3))$  существует окрестность регулярного представления  $\rho$ , в которой все представления являются регулярными и могут быть параметризованы некоторым количеством вещественных координат. Эти координаты мы будем называть *локальными параметрами* представления  $\rho$ .

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что  $\rho$  является регулярным представлением.

## § 1.2. Ациклический комплекс и инвариант 3-многообразия

Вернемся к построению геометрического инварианта.

**Определение 1.10.** Для фиксированного представления  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{E}(3)$ , *централизатором* подгруппы  $\text{Im } \rho$  называется множество элементов  $g \in \mathbf{E}(3)$ , таких что  $g\rho(h)g^{-1} = \rho(h)$  для всех  $h \in \pi_1(M)$ .

Централизатор образует подгруппу в  $\mathbf{E}(3)$ , которую мы обозначим  $\mathbf{E}(3)_\rho$ . Алгебру Ли группы  $\mathbf{E}(3)_\rho$  (касательное пространство в единице) мы будем обозначать  $\mathfrak{e}(3)_\rho$ . Другими словами,

$$\mathfrak{e}(3)_\rho = \{u \in \mathfrak{e}(3) \mid \text{Ad}_{\rho(h)} u = u, \forall h \in \pi_1(M)\} = H^0(M; \text{Ad}_\rho),$$

где  $\text{Ad}_\rho = \text{Ad} \circ \rho: \pi_1(M) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{e}(3))$  и  $\text{Ad}: g \mapsto \text{Ad}_g$  — присоединенное представление,  $H^0(M; \text{Ad}_\rho)$  — нулевая группа когомологий с коэффициентами в алгебре Ли  $\mathfrak{e}(3)$ .

Выберем наиболее естественный с геометрической точки зрения базис всей алгебры Ли  $\mathfrak{e}(3)$ , состоящий из трех сдвигов  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  вдоль осей декартовой системы координат и трех вращений  $d\varphi_x$ ,  $d\varphi_y$  и  $d\varphi_z$  вокруг соответствующих осей. Тогда, мы также имеем индуцированный ограничением базис в подалгебре  $\mathfrak{e}(3)_\rho$ .

**Определение 1.11.** Представление  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \text{E}(3)$  называется *абелевым* (*тривиальным*) если его образ есть абелева (тривиальная) подгруппа в  $\text{E}(3)$ .

**Предложение 1.9.** Пусть  $\mathfrak{e}(3)$  — алгебра Ли группы  $\text{E}(3)$ ,  $\mathfrak{o}$  — тривиальная алгебра Ли. Тогда:

$$\mathfrak{e}(3)_\rho = \begin{cases} \mathfrak{e}(3), & \text{если } \rho \text{ тривиально;} \\ \mathfrak{o}, & \text{если } \rho \text{ неабелево.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Если представление  $\rho$  абелево, то

$$\mathfrak{e}(3)_\rho = \begin{cases} \mathfrak{t}(3), & \text{если } \text{Im } \rho \text{ состоит из сдвигов вдоль непараллельных осей;} \\ \mathfrak{t}(3) \oplus \mathfrak{so}(2), & \text{если } \text{Im } \rho \text{ состоит из сдвигов вдоль параллельных осей;} \\ \mathfrak{e}(3)_2, & \text{если } \text{Im } \rho \not\subset T(3). \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь  $\mathfrak{t}(3)$  — трехмерная алгебра Ли группы трансляций  $T(3)$ ,  $\mathfrak{e}(3)_2$  — двумерная подалгебра алгебры  $\mathfrak{e}(3)$ , состоящая из дифференциала винтового движения вдоль фиксированной оси в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .



*Доказательство.* В случае, если  $\rho$  тривиально, централизатор группы  $\text{Im } \rho$  совпадает со всей группой  $E(3)$ , следовательно  $\mathfrak{e}(3)_\rho = \mathfrak{e}(3)$ .

Напомним, что группа трансляций  $T(3)$  является нормальной абелевой подгруппой в  $E(3) \cong SO(3) \times T(3)$ , где  $\times$  — полупрямое произведение групп и  $E(3)/T(3) \cong SO(3)$ . Пусть, представление  $\rho$  неабелево. В этом случае,  $\text{Im } \rho$  состоит из вращений (и, может быть, сдвигов) вокруг как минимум двух непараллельных осей, скажем  $u$  и  $v$ . Отсюда следует, что  $E(3)_\rho$  является подгруппой в  $T(3)$ . Но сдвиг вдоль любой оси не может коммутировать с обоими поворотами вокруг осей  $u$  и  $v$ . Поэтому,  $E(3)_\rho = 1$  и  $\mathfrak{e}(3)_\rho = \mathfrak{o}$ .

Наконец, пусть  $\rho$  — абелево представление. Если  $\text{Im } \rho \subset T(3)$ , то очевидно возможны два случая, которым соответствуют первые две строки в (1.12). Если же  $\text{Im } \rho \not\subset T(3)$ , то  $\text{Im } \rho$  состоит из вращений (либо из винтовых движений) вокруг некоторой оси  $z$  в  $\mathbb{R}^3$ . Существуют только два типа движений в группе  $E(3)$ , которые коммутируют со всеми элементами из  $\text{Im } \rho$ : вращение вокруг оси  $z$  и сдвиг вдоль нее. Поэтому, алгебра  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  в этом случае состоит из дифференциала винтового движения вдоль оси  $z$ .  $\square$

Пусть  $N_i$  — количество  $i$ -мерных симплексов в фундаментальном семействе  $\mathcal{F}$ .

Определим  $3N_0$ -мерное векторное пространство  $\mathbb{R}_x^{3N_0}$  как пространство всех отображений множества вершин фундаментального семейства  $\mathcal{F}$  в  $\mathbb{R}^3$ . Определим касательное пространство  $(dx) = T_x \mathbb{R}_x^{3N_0}$ . Другими словами, пространство  $(dx)$  состоит из форм объема  $dx_A \wedge dy_A \wedge dz_A$  для каждой вершины  $A \in \mathcal{F}$ . Базис в пространстве  $(dx)$  порождается выбором системы координат в  $\mathbb{R}^3$ . Для удобства будем считать, что эта система координат *декартова*.

Рассмотрим линейное отображение  $f_1: \mathfrak{e}(3)_\rho \rightarrow (dx)$ , определенное следующим образом. Шесть генераторов алгебры Ли  $\mathfrak{e}(3) - dx, dy, dz, d\varphi_x, d\varphi_y, d\varphi_z$  — под действием  $f_1$  отображаются в дифференциалы координат вершины  $A$  по очевидной формуле:

$$\begin{pmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d\varphi_z & -d\varphi_y \\ -d\varphi_z & 0 & d\varphi_x \\ d\varphi_y & -d\varphi_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

где  $x_A, y_A$  и  $z_A$  — координаты вершины  $A$ .

Определим векторное пространство  $(dg) = T_{[\rho]}R(M, E(3))$ . Его базис фиксирован и состоит из дифференциалов локальных координат, заданных в окрестности  $[\rho]$ . В частности, если  $[\rho]$  является изолированной точкой (например, для конечной группы  $\pi_1(M)$ ), то  $(dg) = 0$ .

Напомним, что

$$T_{[\rho]}R(M, E(3)) \cong H^1(M; \text{Ad}_\rho) = Z^1(M; \text{Ad}_\rho) / B^1(M; \text{Ad}_\rho), \quad (1.14)$$

где  $Z^1(M; \text{Ad}_\rho)$  — векторное пространство коциклов, состоящее из всех отображений  $\xi: \pi_1(M) \rightarrow \mathfrak{e}(3)$ , удовлетворяющих условию:

$$\xi(g_1g_2) = \xi(g_1) + \text{Ad}_{\rho(g_1)} \xi(g_2); \quad (1.15)$$

$B^1(M; \text{Ad}_\rho)$  — векторное пространство кограниц, состоящее из всех отображений  $\xi: \pi_1(M) \rightarrow \mathfrak{e}(3)$ , которые можно представить в виде  $\xi = u - \text{Ad}_\rho u$  для некоторого  $u \in \mathfrak{e}(3)$ .

**Пример 1.1.** Пусть  $\theta: \pi_1(M) \rightarrow E(3)$  — тривиальное представление. Тогда, условие (1.15) имеет вид  $\xi(g_1g_2) = \xi(g_1) + \xi(g_2) = \xi(g_2g_1)$ . Отсюда следует, что

любой 1-коцикл является линейным отображением  $H_1(M) \rightarrow \mathfrak{e}(3)$ , где  $H_1(M)$  — первая группа гомологий многообразия  $M$ . Все кограницы в данном случае тривиальны. Поэтому,

$$H^1(M; \text{Ad}_\theta) = \text{Hom}(H_1(M), \mathfrak{e}(3)) \cong \bigoplus^{\beta_1} \mathfrak{e}(3),$$

где  $\beta_1$  — ранг группы  $H_1(M)$ .

Пусть  $e \in \mathcal{F}$  произвольное ребро фундаментального семейства. Пусть  $L_e = \frac{1}{2}l_e^2$ , где  $l_e$  — евклидова длина ребра  $\Gamma(e) \in \mathbb{R}^3$ . Определим  $N_1$ -мерное векторное пространство  $\mathbb{R}_L^{N_1}$  как пространство всех отображений множества ребер фундаментального семейства  $\mathcal{F}$  в  $\mathbb{R}$ . Нижний индекс  $L$  подчеркивает, что базис этого пространства состоит из векторов  $(L_1, \dots, L_{N_1})$ . Определим касательное пространство  $(dL) = T_\Gamma \mathbb{R}_L^{N_1}$ .

Рассмотрим линейное отображение  $f_2: (dx) \oplus (dg) \rightarrow (dL)$ . По определению, заданные дифференциалы координат вершин  $A$  и  $B$  при  $f_2$  переходят в

$$\begin{aligned} dL_{AB} = & (x_B - x_A)(dx_B - dx_A) + (y_B - y_A)(dy_B - dy_A) + \\ & (z_B - z_A)(dz_B - dz_A) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_{AB}}{\partial g_i} dg_i. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Таким образом, эта формула описывает просто изменение величины  $L_{AB}$  при бесконечно малых изменениях координат точек  $A$  и  $B$  и локальных параметров  $g_1, \dots, g_n$  представления  $\rho$ .

Поскольку базисы пространств  $\mathfrak{e}(3)_\rho$ ,  $(dx)$ ,  $(dg)$  и  $(dL)$  фиксированы, то отображения  $f_1$  и  $f_2$  однозначно определяются своими матрицами, которые мы для удобства будем обозначать теми же буквами.

Обозначим  $\Omega_e = \frac{\omega_e}{l_e}$ , где  $\omega_e$  — угол дефекта ребра  $\Gamma(e)$  (см. определение 1.1). Аналогично пространству  $(dL)$ , определим пространство  $(d\Omega) = T_\Gamma \mathbb{R}_\Omega^{N_1}$ .

Занумеруем ребра фундаментального семейства в некотором порядке и введем в рассмотрение матрицу  $f_3 = \left( \frac{\partial \Omega_i}{\partial L_j} \right)$ , где  $i$  и  $j$  пробегают все ребра из  $\mathcal{F}$ , а частные производные берутся в точке  $\omega_1 = \dots = \omega_{N_1} = 0$ . Элементы матрицы  $f_3$  определяются одним из пяти случаев, разобранных выше, по формулам (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7). Из этих формул, в частности, следует, что матрица  $f_3$  симметрична. Этот же результат можно доказать непосредственно.

**Лемма 1.10.** *Матрица  $f_3$  симметрична, т.е.  $f_3^T = f_3$ .*

*Доказательство.* Очевидно, что  $f_3 = \left( \frac{1}{l_i l_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial l_j} \right)$ . Поэтому достаточно доказать симметричность матрицы  $\left( \frac{\partial \omega_i}{\partial l_j} \right)$ . Найдем гессиан функции  $H(l_1, \dots, l_{N_1}) = \sum_k l_k \omega_k$  в точке  $\omega_1 = \dots = \omega_{N_1} = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial l_j} \left( \frac{\partial H}{\partial l_i} \right) = \frac{\partial}{\partial l_j} \left( \omega_i + \sum_{k=1}^{N_1} l_k \frac{\partial \omega_k}{\partial l_i} \right) = \frac{\partial \omega_i}{\partial l_j},$$

т.к.  $\sum_{k=1}^{N_1} l_k d\omega_k = 0$  (следствие из дифференциального тождества Шлефли [54, стр. 281–295]). Отсюда получаем утверждение леммы.  $\square$

Обозначим  $\mathfrak{e}(3)_\rho^*$ ,  $(dx)^*$  и  $(dg)^*$  векторные пространства, фиксированные базисы которых *двойственны* базисам пространств  $\mathfrak{e}(3)_\rho$ ,  $(dx)$  и  $(dg)$  соответственно. Это означает, что если, к примеру,  $d = (d_1, \dots, d_k)$  — базис пространства  $\mathfrak{e}(3)_\rho$ , то базис  $d^* = (d_1^*, \dots, d_k^*)$  пространства  $\mathfrak{e}(3)_\rho^*$  определяется из условий:

$$d_i^*(d_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

**Теорема 1.11.** *Последовательность векторных пространств и отображений*

$$0 \rightarrow \mathfrak{e}(\mathcal{Z})_\rho \xrightarrow{f_1} (dx) \oplus (dg) \xrightarrow{f_2} (dL) \xrightarrow{f_3=f_3^T} (d\Omega) \xrightarrow{-f_2^T} (dx)^* \oplus (dg)^* \xrightarrow{f_1^T} \mathfrak{e}(\mathcal{Z})_\rho^* \rightarrow 0 \quad (1.17)$$

*является ациклическим комплексом (см. определение 1.5).*

*Доказательство.* Мы последовательно проверим условия ацикличности во всех пространствах последовательности (1.17).

**Ацикличность в  $\mathfrak{e}(\mathcal{Z})_\rho$**  (= инъективность отображения  $f_1$ ) следует из того, что вершины фундаментального семейства находятся в общем положении (см. замечание 1.1).

**Ацикличность в  $(dx) \oplus (dg)$ .** Базисные элементы алгебры  $\mathfrak{e}(\mathcal{Z})_\rho$  порождают глобальные бесконечно малые смещения вершин симплицеального комплекса, не меняющие длин ребер. Поскольку  $(dg) \subset \text{Coker } f_1$ , то отсюда следует, что  $\text{Im } f_1 \subset \text{Ker } f_2$ .

Для доказательства обратного включения, мы должны показать, что если координатам вершин фундаментального семейства приданы бесконечно малые приращения  $d\vec{v}_i$  так, что все  $dL_j = 0$ , то найдется такой элемент  $u$  алгебры Ли  $\mathfrak{e}(\mathcal{Z})_\rho$ , что для всех  $i$  выполняется

$$d\vec{v}_i = u \cdot \vec{v}_i,$$

где  $\vec{v}_i$  — радиус-вектор  $i$ -ой вершины. То что  $u \in \mathfrak{e}(\mathcal{Z})$  и не зависит от  $i$  очевидно из геометрических соображений. Покажем, что  $u\rho(h) = \rho(h)u$  для всех  $h \in \pi_1(M)$ .

Доказательство проведем от противного. Предположим, что найдется такое  $h \in \pi_1(M)$ , для которого выполняется  $u\rho(h) \neq \rho(h)u$ . Тогда, очевидно, что

если объемы всех тетраэдров из фундаментального семейства не равны нулю, то  $u$  порождает бесконечно малые смещения вершин из  $\mathcal{F}$ , при которых  $dL_{A,hA} \neq 0$ , где  $A$  — произвольная вершина из  $\mathcal{F}$ . Однако это невозможно, если  $dL_j = 0 \forall j \in \mathcal{F}$ . Получили противоречие, из которого следует, что  $u\rho(h) = \rho(h)u$  для всех  $h \in \pi_1(M)$ . Поэтому,  $\text{Ker } f_2 \subset \text{Im } f_1$  и значит  $\text{Im } f_1 = \text{Ker } f_2$ , т.е. мы имеем ацикличность в  $(dx) \oplus (dg)$ .

**Ацикличность в  $(dL)$ .** Элементы фактор-пространства  $(dx)/\mathfrak{e}(3)_\rho \oplus (dg)$  порождают бесконечно малые изменения длин ребер симплициального комплекса, но оставляют нулевыми углы дефекта, т.е.  $\text{Im } f_2 \subset \text{Ker } f_3$ .

Для доказательства обратного включения мы должны показать, что если величины  $L_j$  получили бесконечно малые приращения  $dL_j$  так, что все  $d\omega_k = 0$ , то  $dL_j$  порождаются некоторыми элементами пространства  $(dx) \oplus (dg)$ . Докажем сначала “конечную” версию этого утверждения.

**Лемма 1.12.** Пусть длинам ребер фундаментального семейства  $\mathcal{F}$  приданы достаточно малые, но конечные приращения  $\Delta l_j$  так, что все  $\Delta\omega_k = 0$ . Тогда, найдется такое представление  $\rho'$  с локальными параметрами  $(g'_1, \dots, g'_n)$  и такое множество точек в  $\mathbb{R}^3$ , что для ребра  $j = AB$  линейная часть приращения  $\Delta L_j$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta L_j = l_j \Delta l_j = & (x_B - x_A)(\Delta x_B - \Delta x_A) + (y_B - y_A)(\Delta y_B - \Delta y_A) + \\ & (z_B - z_A)(\Delta z_B - \Delta z_A) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_j}{\partial g_i} \Delta g_i, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где  $\Delta g_i = g'_i - g_i$ .

*Доказательство.* Если  $\Delta l_j$  достаточно малы, то все определители вида (1.1) остаются положительными. Вместе с условием  $\Delta\omega_k = 0, \forall k$  это означает, что

величины  $l_j + \Delta l_j$  задают допустимую расцветку на комплексе  $T$  и индуцированную допустимую расцветку на комплексе  $\tilde{T}$  для универсальной накрывающей. По теореме 1.1, существует непрерывное отображение  $\Gamma': \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$  такое, что  $l'_j = l_j + \Delta l_j, \forall j$ , где  $l'_j$  — длина ребра  $\Gamma'(e_j)$ . Тогда, образы всех вершин из фундаментального семейства относительно  $\Gamma'$  и составляют искомое множество точек.

Далее, согласно предложению 1.5, допустимой расцветке величинами  $l'_j$  отвечает единственный класс эквивалентных представлений  $[\rho']$ , который вообще говоря не совпадает с классом  $[\rho]$ , отвечающим допустимой расцветке величинами  $l_j$ . Напомним, что  $\rho$  — регулярное представление (определение 1.9). Из теоремы 1.8 следует, что в некоторой окрестности  $[\rho]$  (содержащей  $[\rho']$ ) все точки пространства  $R(M, E(3))$  являются гладкими некоторой размерности  $n$  (определение 1.8). Поэтому, если  $(g_1, \dots, g_n)$  и  $(g'_1, \dots, g'_n)$  — локальные параметры представлений  $\rho$  и  $\rho'$  соответственно, то определены  $\Delta g_i = g'_i - g_i$  такие, что выполнено (1.18).  $\square$

Из леммы 1.12 следует, что в последовательности

$$\mathbb{R}_x^{3N_0} \times R(M, E(3)) \xrightarrow{F_2} \mathbb{R}_L^{N_1} \xrightarrow{F_3} \mathbb{R}_\Omega^{N_1}, \quad (1.19)$$

где  $F_2$  и  $F_3$  — дифференцируемые отображения, в некоторой окрестности точки  $\Gamma$  выполнено включение  $\text{Ker } F_3 \subset \text{Im } F_2$ . По условиям общего положения из замечания 1.1, ранг матрицы  $f_3$  принимает максимальное значение в  $\Gamma$ , которое мы обозначим  $\mu$ . Тогда, по теореме о неявной функции, в пространстве  $\mathbb{R}_L^{N_1}$  найдется окрестность точки  $\Gamma$ , все точки которой можно параметризовать базисными векторами  $L_1, \dots, L_{N_1-\mu}$ , принадлежащими пространству  $\text{Ker } F_3$ . Теперь, придавая малые конечные приращения  $\Delta L_j$  величинам  $L_1, \dots, L_{N_1-\mu}$  (при

этом,  $\Delta\Omega_k = 0, \forall k$ ) и переходя к пределу при  $\Delta L_j \rightarrow dL_j$ , получаем, что  $\text{Ker } f_3 \subset \text{Im } f_2$ . Вместе с обратным включением это дает ацикличность в пространстве  $(dL)$ .

**Ацикличность в остальных пространствах.** Напомним, что условие  $\text{Ker } f_3 = \text{Im } f_2$  равносильно равенству

$$\text{rank } f_3 = \dim(dL) - \text{rank } f_2.$$

Отсюда, учитывая, что  $\dim(dL) = \dim(d\Omega)$  и  $\text{rank}(-f_2^T) = \text{rank } f_2$ , получаем:

$$\text{rank}(-f_2^T) = \dim(d\Omega) - \text{rank } f_3,$$

т.е. ацикличность в члене  $(d\Omega)$ . Аналогично, ацикличность в оставшихся пространствах  $(dx)^* \oplus (dg)^*$  и  $\mathfrak{e}(3)_\rho^*$  следует из ацикличности в пространствах  $(dx) \oplus (dg)$  и  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  соответственно. Теорема 1.11 доказана.  $\square$

Обозначим  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$  произвольным образом упорядоченные множества базисных векторов в пространствах  $\mathfrak{e}(3)_\rho, (dx) \oplus (dg)$  и  $(dL)$  соответственно. Пусть  $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{C}_i$  — подмножество базисных векторов, принадлежащих пространству  $\text{Im } f_i$ . Обозначим  $\mathcal{B}_i f_i$  базисный минор матрицы  $f_i$ , строки которого соответствуют векторам из множества  $\mathcal{C}_{i-1} \setminus \mathcal{B}_{i-1}$ , а столбцы — векторам из множества  $\mathcal{B}_i$ . При этом мы всегда будем считать, что  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{B}_2$ . Тогда, согласно определению 1.6, кручение ациклического комплекса (1.17) имеет вид:

$$\tau = (-1)^{\text{rank } f_2} \frac{(\det \mathcal{B}_2 f_2)^2}{\det \mathcal{B}_3 f_3 (\det \mathcal{B}_1 f_1)^2}. \quad (1.20)$$

*Замечание 1.3.* Из формы ациклического комплекса (1.17) следует, что кручение  $\tau$  не зависит от упорядочения множеств  $\mathcal{C}_i$ .



Положим

$$I_\rho(M) = \frac{\tau}{\prod(-V)}, \quad (1.21)$$

где  $V$  обозначает ушестеренный объем тетраэдра и произведение распространяется на все тетраэдры из  $\mathcal{F}$ .

**Теорема 1.13.** *Для фиксированного представления  $\rho$  величина  $I_\rho(M)$  является инвариантом многообразия  $M$ .*

*Доказательство* разобьем на несколько лемм. Мы должны показать, что величина  $I_\rho(M)$  не зависит от различных деталей ее построения. Во-первых, она не зависит от выбора фундаментального семейства  $\mathcal{F}$ . Во-вторых, от выбора триангуляции  $T$  многообразия  $M$ . Наконец,  $I_\rho(M)$  не зависит от отображения  $\Gamma$ , т.е., не имеет значения, в какие именно точки евклидова пространства мы помещаем вершины фундаментального семейства.

**Лемма 1.14.** *Величина  $I_\rho(M)$  не зависит от выбора фундаментального семейства  $\mathcal{F}$ , а также от выбора представителя в классе эквивалентности  $[\rho]$ .*

*Доказательство.* Во-первых заметим, что поскольку соответствующие симплексы из разных фундаментальных семейств переходят друг в друга посредством изометрий, то длины ребер, двугранные углы и объемы тетраэдров при замене одного фундаментального семейства другим не меняются. Могут меняться лишь базисы в пространствах  $(dx)$  и  $(dx)^*$ . При этом они должны оставаться двойственными друг другу.

Обозначим  $A \in \text{SO}(3N_0)$  матрицу замены базиса в пространстве  $(dx)$ ,  $B$  — матрицу замены базиса в пространстве  $(dx)^*$ . Тогда,  $\tilde{f}_2 = f_2 A$ ,  $-\widetilde{f_2^T} = -B^{-1} f_2^T = -\tilde{f}_2^T = -A^T f_2^T$ . Отсюда следует, что  $B = (A^T)^{-1}$ . Значит кручение

комплекса (1.17) при замене фундаментального семейства делится на  $(\det A)^2 = 1$  (см. замечание 1.2).

Аналогично, при замене представления эквивалентным, меняется только система координат в  $\mathbb{R}^3$ , а значит базисы в пространствах  $(dx)$  и  $(dx)^*$ . В остальных пространствах базисы остаются неизменными. Поэтому изменение кручения комплекса (1.17) вновь сводится к делению на квадрат определителя ортогональной матрицы. Следовательно, инвариант (1.21) остается неизменным. Лемма 1.14 доказана.  $\square$

**Лемма 1.15** ([43]). *Величина  $I_\rho(M)$  не зависит от триангуляции многообразия  $M$ .*

*Доказательство.* Покажем, что  $I_\rho(M)$  остается инвариантной при движениях Пахнера  $2 \leftrightarrow 3$  и  $1 \leftrightarrow 4$  триангуляции многообразия  $M$ . Достаточно провести доказательство для движений  $2 \rightarrow 3$  и  $1 \rightarrow 4$ .

Напомним, что при движении  $2 \rightarrow 3$ , мы заменяем объединение двух смежных тетраэдров  $ABCD$  и  $EABC$  на объединение трех тетраэдров  $ABED$ ,  $BCED$  и  $CAED$  с помощью добавления нового ребра  $DE$  (рис. 1(а)). Тогда, к фундаментальному семейству  $\mathcal{F}$  добавляется новое ребро  $\widetilde{DE}$  — произвольный прообраз ребра  $DE$  относительно отображения накрытия. Для удобства, ребро  $\Gamma(\widetilde{DE}) \in \mathbb{R}^3$  мы будем обозначать как  $DE$ . Длина этого ребра  $l_{DE}$  является функцией остальных длин ребер комплекса, которую в неявном виде можно записать как  $\omega_{DE} = 0$ .

Обозначим  $\tilde{L}_{DE} = L_{DE} - L_{DE}^{(0)}$ , где  $L_{DE}^{(0)}$  является решением уравнения  $\omega_{DE} = 0$ . Тогда,

$$d\tilde{L}_{DE} = dL_{DE} - \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial L_{DE}}{\partial L_i} \Big|_{\omega_{DE}=0} dL_i,$$

где  $N_1$  — количество ребер в фундаментальном семействе до добавления ребра  $DE$ , и

$$\left. \frac{\partial L_{DE}}{\partial L_i} \right|_{\omega_{DE}=0} = -\frac{\partial \Omega_{DE}/\partial L_i}{\partial \Omega_{DE}/\partial L_{DE}}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} d\Omega_1 \\ \vdots \\ d\Omega_{N_1} \\ d\Omega_{DE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial L_{DE}} \\ f_3 & \vdots \\ & \frac{\partial \Omega_{N_1}}{\partial L_{DE}} \\ 0 \ \dots \ 0 & \frac{\partial \Omega_{DE}}{\partial L_{DE}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dL_1 \\ \vdots \\ dL_{N_1} \\ d\tilde{L}_{DE} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Поэтому, матрица

$$\tilde{f}_3: (dL) \oplus (dL_{DE}) \rightarrow (d\Omega) \oplus (d\Omega_{DE})$$

факторизуется следующим образом:

$$\tilde{f}_3 = \begin{pmatrix} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial L_{DE}} \\ f_3 & \vdots \\ & \frac{\partial \Omega_{N_1}}{\partial L_{DE}} \\ 0 \ \dots \ 0 & \frac{\partial \Omega_{DE}}{\partial L_{DE}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ -\frac{\partial L_{DE}}{\partial L_1} & \dots & -\frac{\partial L_{DE}}{\partial L_{N_1}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Используя формулу (1.6), получаем

$$\det_{\tilde{\mathcal{B}}_3} \tilde{f}_3 = \det_{\mathcal{B}_3} f_3 \cdot \frac{1}{l_{DE}^2} \frac{\partial \omega_{DE}}{\partial l_{DE}} = \det_{\mathcal{B}_3} f_3 \cdot \left( -\frac{V_{ABCD}V_{EABC}}{V_{ABED}V_{BCED}V_{CAED}} \right),$$

где  $\tilde{\mathcal{B}}_3 = \mathcal{B}_3 \cup \{d\Omega_{DE}\}$ , и

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tau} = -\frac{V_{ABED}V_{BCED}V_{CAED}}{V_{ABCD}V_{EABC}}, \quad (1.24)$$

где  $\tau$  — кручение комплекса (1.17) до движения  $2 \rightarrow 3$ ,  $\tilde{\tau}$  — после. Отсюда следует, что выражение (1.21) остается неизменным при движении  $2 \rightarrow 3$ . Кроме того, по лемме о невырожденной  $\tau$ -цепи (лемма 1.7) из (1.24) следует, что комплекс (1.17) сохраняет свойство ацикличности при движении  $2 \rightarrow 3$ .

Рассмотрим теперь движение  $1 \rightarrow 4$  (рис. 1(b)). В произвольный тетраэдр  $ABCD$  добавляется новая вершина  $E$ . При этом появляются четыре новых ребра  $AE$ ,  $BE$ ,  $CE$  и  $DE$ .

Рассуждения, полностью аналогичные проведенным выше для движения  $2 \rightarrow 3$ , показывают, что определитель матрицы  $\mathcal{B}_3 f_3$  по-прежнему умножается на  $\frac{\partial \Omega_{DE}}{\partial L_{DE}}$ . Кроме того, мы используем известную формулу:

$$dx_E \wedge dy_E \wedge dz_E = \frac{dL_{AE} \wedge dL_{BE} \wedge dL_{CE}}{V_{ABCE}}, \quad (1.25)$$

которая показывает как меняется определитель базисного минора матрицы  $f_2$ .

Объединяя эти результаты, получаем

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tau} = -\frac{V_{ABED}V_{BCED}V_{CAED}V_{ABCE}}{V_{ABCD}}. \quad (1.26)$$

Отсюда следует, что выражение (1.21) остается неизменным и при движении  $1 \rightarrow 4$ . По лемме о невырожденной  $\tau$ -цепи из (1.25) и (1.26) следует, что комплекс (1.17) остается ациклическим при движении  $1 \rightarrow 4$ .

Теперь, утверждение леммы следует из теоремы Пахнера (теорема 0.1 во введении).  $\square$

**Лемма 1.16.** *Величина  $I_\rho(M)$  не зависит от того, в какие точки евклидова пространства мы помещаем вершины фундаментального семейства триангуляции  $\tilde{T}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $v$  — произвольная вершина триангуляции  $T$  многообразия  $M$  и  $\tilde{v} \in \mathcal{F}$ . Покажем, что с помощью движений Пахнера вершину  $O = \Gamma(\tilde{v})$  можно переместить в другую точку пространства  $\mathbb{R}^3$ , не меняя местоположения всех остальных вершин из  $\Gamma(\mathcal{F})$ . Тогда утверждение леммы будет

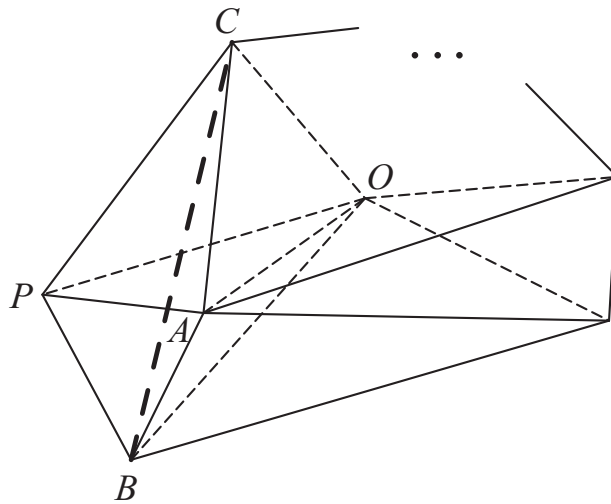


Рис. 1.2. Линк вершины  $O$ . Движением  $2 \rightarrow 3$  убираем ребро  $AP$  из  $\text{lk}(O)$

следовать из инвариантности величины  $I_\rho(M)$  при движениях Пахнера (лемма 1.15).

Напомним, что объединение всех симплексов комплекса, для которых  $O$  служит вершиной, называется ее *звездой* и обозначается  $\text{St}(O)$ . Объединение всех тех симплексов звезды  $\text{St}(O)$ , для которых  $O$  не служит вершиной, называется *линком* вершины  $O$  и обозначается  $\text{lk}(O)$ .

Сначала мы измельчаем исходную триангуляцию  $T$  с помощью некоторой конечной последовательности движений  $2 \leftrightarrow 3$  и  $1 \leftrightarrow 4$  до тех пор, пока в результате не получится *комбинаторная* триангуляция, в которой линк любой вершины  $O$  является триангулированной 2-сферой. Это всегда можно сделать, например, с помощью *барицентрического* подразделения.

Далее, пусть вершины  $A, B, C$  и  $P$  принадлежат линку вершины  $O$  так, как изображено на рисунке 1.2. В кластере из двух тетраэдров  $AOPC$  и  $BAOP$  сделаем движение  $2 \rightarrow 3$ , добавив новое ребро  $BC$ . При этом, в линке вершины  $O$  ребро  $AP$  заменится ребром  $BC$ . Действуя таким образом, мы можем уменьшить количество ребер, исходящих из  $A$  и лежащих в  $\text{lk}(O)$  до трех. По-

сле этого, с помощью движения  $3 \rightarrow 2$  убираем ребро  $OA$  из  $\text{St}(O)$ , а вершину  $A$  из  $\text{lk}(O)$ . Продолжая этот процесс, можно уменьшить количество вершин в  $\text{lk}(O)$  до четырех.

Затем, мы делаем движение  $4 \rightarrow 1$  и тем самым убираем вершину  $O$  из триангуляции. После этого, с помощью движения  $1 \rightarrow 4$  возвращаем ее обратно, но уже в другую точку пространства  $\mathbb{R}^3$  (требуя при этом, чтобы по-прежнему выполнялись условия общего положения из замечания 1.1). После этого, мы возвращаемся к исходному симплициальному комплексу, обращая всю последовательность движений Пахнера. Остается заметить, что на каждом шаге величина  $I_\rho(M)$  остается неизменной по лемме 1.15.  $\square$

Теорема 1.13 доказана.  $\square$

Выпишем здесь формулы, полезные для компьютерных вычислений инварианта  $I_\rho(M)$ .

**Предложение 1.17.** *В евклидовом тетраэдре  $ABCD$  обозначим  $\vec{r}_{AB}$  вектор ребра  $AB$ ,  $l_{AB} = |\vec{r}_{AB}|$ ,  $\vec{S}_{ABC} = \vec{r}_{AB} \times \vec{r}_{AC}$ ,  $\varphi_{AB} = \arccos \frac{\vec{S}_{ABC} \cdot \vec{S}_{ABD}}{S_{ABC} S_{ABD}}$  ( $\varphi_{AB} \in [0, \pi]$ ),  $V_{ABCD} = \vec{S}_{ABC} \cdot \vec{r}_{AD}$ . Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{\partial \varphi_{AB}}{\partial l_{CD}} = \frac{l_{AB} l_{CD}}{V_{ABCD}}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \varphi_{AB}}{\partial l_{BC}} = \frac{l_{AB} l_{BC}}{V_{ABCD}} \frac{\vec{S}_{ACD} \cdot \vec{S}_{ABC}}{S_{ABC}^2}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \varphi_{AB}}{\partial l_{AB}} = \frac{l_{AB}^2}{V_{ABCD}} \frac{(\vec{S}_{ACD} \cdot \vec{S}_{ABC})(\vec{S}_{BCD} \cdot \vec{S}_{ABC})}{(\vec{S}_{ABD} \cdot \vec{S}_{ABC}) S_{ABC}^2} + \frac{1}{4} V_{ABCD} \frac{l_{AB}^4 - (l_{BD}^2 - l_{AD}^2)^2}{(\vec{S}_{ABD} \cdot \vec{S}_{ABC}) S_{ABD}^2}. \quad (1.29)$$

*Доказательство.* Первая формула по сути совпадает с уже доказанной формулой (1.3). Докажем вторую формулу. Для этого рассмотрим кластер из двух

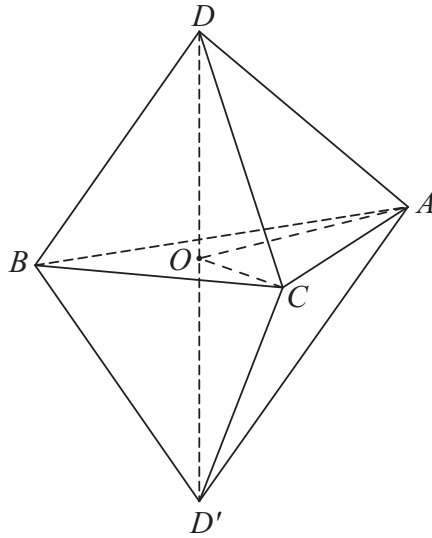


Рис. 1.3. Иллюстрация к формуле (1.28)

тетраэдров  $ABCD$  и  $ABCD'$ , изображенный на рисунке 1.3. Вершина  $D'$  расположена симметрично вершине  $D$  относительно грани  $ABC$ . Точка  $O$  на рисунке делит ребро  $DD'$  пополам. Согласно формуле (1.4), получаем

$$\frac{\partial \varphi_{AB}}{\partial l_{BC}} = -\frac{1}{2} l_{AB} l_{BC} \frac{V_{CAD'D}}{V_{ABCD} V_{D'ABC}} = \frac{1}{2} l_{AB} l_{BC} \frac{V_{CAD'D}}{V_{ABCD}^2}. \quad (1.30)$$

Найдем чему равно  $V_{CAD'D}$ :

$$V_{CAD'D} = 2V_{CAOD} = 2S_{ACO} l_{DO} = 2S_{ACD} \cos \varphi_{AC} l_{DO} = 2 \frac{\vec{S}_{ACD} \cdot \vec{S}_{ABC}}{S_{ABC}} \frac{V_{ABCD}}{S_{ABC}}.$$

Подставляя найденное выражение для  $V_{CAD'D}$  в (1.30), получим (1.28).

Оставшуюся формулу (1.29) можно получить аналогичным, но более громоздким вычислением. □

Пусть представление  $\rho$  тривиально. Компьютерные вычисления указывают на то, что в этом случае инвариант  $I_\rho(M)$  выражается через первую группу гомологий многообразия. Именно, у нас есть следующая

**Гипотеза 1.18.** Пусть  $M$  — ориентируемое замкнутое трехмерное многообразие с конечной фундаментальной группой,  $|\text{Tors } H_1(M; \mathbb{Z})|$  — порядок под-

группы конечных элементов первой группы гомологий многообразия  $M$ . Если представление  $\theta: \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{E}(3)$  тривиально, то

$$I_\theta(M) = -|\text{Tors } H_1(M; \mathbb{Z})|^{-6}.$$

### § 1.3. Мультипликативность инварианта относительно операции связной суммы

Напомним, как определяется связная сумма двух многообразий. Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — триангулированные ориентированные замкнутые 3-мерные многообразия,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — пара 3-мерных симплексов из триангуляций  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Тогда, *связная сумма*

$$M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus \text{Int } \tau_1) \cup_r (M_2 \setminus \text{Int } \tau_2)$$

получается приклеиванием многообразий  $M_i \setminus \text{Int } \tau_i$  вдоль их общего края  $\partial\tau_i$  по обращающему ориентацию гомеоморфизму  $r: \partial\tau_1 \rightarrow \partial\tau_2$ . Из теоремы Ван-Кампена следует, что  $\pi_1(M_1 \# M_2) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$ , где  $*$  означает свободное произведение групп.

Пусть  $M_1, M_2$  — ориентированные замкнутые 3-мерные многообразия,  $\rho_i: \pi_1(M_i) \rightarrow \mathbf{E}(3)$  — представление фундаментальной группы многообразия  $M_i$  в  $\mathbf{E}(3)$ . Обозначим  $\rho_\#: \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) \rightarrow \mathbf{E}(3)$  представление свободного произведения групп  $\pi_1(M_1)$  и  $\pi_1(M_2)$  такое, что  $\rho_\#|_{\pi_1(M_i)} = \rho_i$ .

Нам понадобится следующая

**Лемма 1.19.** *Обозначим  $k, k_1, k_2, n, n_1, n_2$  размерности пространств  $\mathbf{e}(3)_{\rho_\#}, \mathbf{e}(3)_{\rho_1}, \mathbf{e}(3)_{\rho_2}, (dg), (dg)', (dg)''$  соответственно, где  $(dg), (dg)'$  и  $(dg)''$  входят*



в ациклический комплекс (1.17) для многообразий  $M_1 \# M_2$ ,  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Тогда,

$$n = n_1 + n_2 - k_1 - k_2 + k + 6. \quad (1.31)$$

*Доказательство.* Напомним определение последовательности Майера-Вьеториса для скрученных групп когомологий, следуя [31]. Пусть  $W$  — компактный клеточный комплекс,  $W_1$  и  $W_2$  — пара его подкомплексов таких, что  $W = W_1 \cup W_2$ . Пусть  $V = W_1 \cap W_2$ . Обозначим  $\kappa_j: W_j \hookrightarrow W$  и  $\iota_j: V \hookrightarrow W_j$  канонические вложения. Рассмотрим представление  $\rho: \pi_1(W) \rightarrow \mathbf{E}(3)$  и соответствующие ограничения  $\rho_j = \rho|_{\pi_1(W_j)}$  и  $\rho_V = \rho|_{\pi_1(V)}$ . Тогда, длинная точная последовательность

$$\dots \rightarrow H_\rho^i(W) \xrightarrow{\kappa^*} H_{\rho_1}^i(W_1) \oplus H_{\rho_2}^i(W_2) \xrightarrow{\iota^*} H_{\rho_V}^i(V) \xrightarrow{\delta} H_\rho^{i+1}(W) \rightarrow \dots, \quad (1.32)$$

где  $\kappa^* = (\kappa_1^*, -\kappa_2^*)$  и  $\iota^* = \iota_1^* + \iota_2^*$ , называется *последовательностью Майера-Вьеториса* скрученных групп когомологий комплекса  $W = W_1 \cup_V W_2$  и представления  $\rho$ .

В нашем случае,  $W = M_1 \# M_2$ ,  $W_1 = M_1$ ,  $W_2 = M_2$  и  $V \cong B^3$ , где  $B^3$  — 3-мерный шар, представление  $\rho = \rho_\#$ . Выпишем часть последовательности Майера-Вьеториса (1.32), используя наши обозначения для  $H_\rho^0$  и  $H_\rho^1$ :

$$\mathbf{e}(3)_{\rho_\#} \rightarrow \mathbf{e}(3)_{\rho_1} \oplus \mathbf{e}(3)_{\rho_2} \rightarrow \mathbf{e}(3) \rightarrow (dg) \rightarrow (dg)' \oplus (dg)'' \rightarrow 0. \quad (1.33)$$

Из точности этой последовательности следует, что ее эйлерова характеристика равна нулю. Отсюда получаем формулу (1.31). Лемма 1.19 доказана.  $\square$

**Теорема 1.20** (мультипликативность инварианта для связных сумм). *Пусть представление  $\rho_1$  тривиально, т.е.  $\rho_1 = \theta$ . В этом случае, для многообразия*

$M_1 \# M_2$  и представления  $\rho_{\#}$  инвариант (1.21) равен

$$I_{\rho_{\#}}(M_1 \# M_2) = -I_{\theta}(M_1) \cdot I_{\rho_2}(M_2). \quad (1.34)$$

*Доказательство.* Обозначим  $\mathcal{F}_{\#} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  фундаментальное семейство симплексов триангуляции накрывающего многообразия  $\widetilde{M_1 \# M_2}$ .

Пусть  $\tau$  — выделенный 3-симплекс, по которому происходит приклеивание многообразий  $M_1$  и  $M_2$ . Пусть  $\tilde{\tau}$  — прообраз  $\tau$ , принадлежащий  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$ . Тогда, без потери общности мы полагаем, что все симплексы из  $\partial\tilde{\tau}$  также лежат в  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$ . Таким образом,  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  состоит в точности из тех симплексов триангуляции, которые принадлежат  $\tilde{\tau}$ .

Фиксируем декартову систему координат  $(x, y, z)$  пространства  $\mathbb{R}^3$ . Вершины тетраэдра  $\Gamma(\tilde{\tau})$  обозначим  $A, B, C, D$  и поместим в точки  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  соответственно. Тогда,  $V_{ABCD} = 1$ .

Разберем структуру векторных пространств, входящих в ациклический комплекс (1.17) для многообразия  $M_1 \# M_2$  и представления  $\rho_{\#}$ . Будем помечать все величины, относящиеся к многообразию  $M_1$ , с помощью одного штриха, величины многообразия  $M_2$  двумя штрихами, а величины многообразия  $M_1 \# M_2$  обозначать теми же символами без штрихов.

Выберем множества  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$  и  $\mathcal{B}''_1$  таким образом, чтобы их элементы соответствовали некоторым координатам вершин  $B, C$  и  $D$ . Тогда, используя предложение 1.9, непосредственным вычислением можно показать, что определители  $\det_{\mathcal{B}'_1} f'_1, \det_{\mathcal{B}''_1} f''_1$  и  $\det_{\mathcal{B}_1} f_1$  всегда равны  $\pm 1$ .

В качестве примера, вычислим  $\det_{\mathcal{B}'_1} f'_1$ . Так как  $\rho_1 = \theta$ , то  $\mathfrak{e}(3)_{\theta} = \mathfrak{e}(3)$  и для нахождения  $\det_{\mathcal{B}'_1} f'_1$  можно положить  $\mathcal{B}'_1 = \{dx_A, dy_A, dz_A, dy_B, dz_B, dz_C\}$ .

Вычисление определителя матрицы размера  $6 \times 6$  дает:

$$\det \mathcal{B}'_1 f'_1 = -x_B^2 y_C = -1.$$

Аналогичное вычисление можно провести и для остальных четырех случаев из предложения 1.9. Таким образом,

$$(\det \mathcal{B}'_1 f'_1)^2 = (\det \mathcal{B}''_1 f''_1)^2 = (\det \mathcal{B}_1 f_1)^2 = 1. \quad (1.35)$$

Далее, пусть множество  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}'_2 \cup \mathcal{B}''_2$ , причем  $\mathcal{B}'_2 \cap \mathcal{B}''_2$  состоит в точности из элементов, соответствующих всем шести ребрам тетраэдра  $ABCD$ .

Так как  $\rho_1$  — тривиально, то из точности последовательности (1.33) следует, что линейное отображение  $(dg) \rightarrow (dg)' \oplus (dg)''$  является изоморфизмом. Поэтому,  $n = n_1 + n_2$ . Отсюда следует, что матрица  $\mathcal{B}_2 f_2$  может быть представлена в блочном виде:

$$\mathcal{B}_2 f_2 = \begin{pmatrix} Q & * \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}''_2 f''_2 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Таким образом,  $\det \mathcal{B}_2 f_2 = \det Q \cdot \det \mathcal{B}''_2 f''_2$ . С другой стороны,  $\det \mathcal{B}'_2 f'_2 = \det Q \cdot \det P$ , где  $P$  — матрица размера  $6 \times 6$ , строки которой соответствуют шести ребрам тетраэдра  $ABCD$ , а столбцы — координатам  $x_B, x_C, y_C, x_D, y_D, z_D$ . Простое вычисление показывает, что

$$\det P = -x_B^2 y_C V_{ABCD} = -1.$$

Отсюда,

$$\det \mathcal{B}_2 f_2 = \frac{\det \mathcal{B}'_2 f'_2 \cdot \det \mathcal{B}''_2 f''_2}{\det P} = -\det \mathcal{B}'_2 f'_2 \cdot \det \mathcal{B}''_2 f''_2.$$

Поскольку множество  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{B}_2$  не содержит элементов, соответствующих ребрам тетраэдра  $ABCD$ , то матрица  $\mathcal{B}_3 f_3$  является блочно-диагональной

с блоками  $\mathcal{B}'_3 f'_3$  и  $\mathcal{B}''_3 f''_3$ . Поэтому,

$$\det \mathcal{B}_3 f_3 = \det \mathcal{B}'_3 f'_3 \cdot \det \mathcal{B}''_3 f''_3.$$

Подставляя найденные значения для всех  $\det \mathcal{B}_i f_i$  в формулу для кручения (1.20), получаем

$$\tau = \frac{(\det \mathcal{B}'_2 f'_2)^2 \cdot (\det \mathcal{B}''_2 f''_2)^2}{\det \mathcal{B}'_3 f'_3 \cdot \det \mathcal{B}''_3 f''_3} (-1)^{3N_0+n-k} = \tau' \cdot \tau'', \quad (1.37)$$

где мы воспользовались формулой (1.31), а также, равенствами (1.35).

Из (1.37) следует формула (1.34). Знак  $-$  возникает из-за того, что в формуле (1.21) для инвариантов  $I_\theta(M_1)$  и  $I_{\rho_2}(M_2)$  объемы двух тетраэдров  $ABCD$  имеют разные знаки. Теорема 1.20 доказана.  $\square$

*Замечание 1.4.* Положим в формуле (1.34)  $M_1 = M_2 = S^3$ . Тогда,  $\rho_\# = \rho_2 = \theta$  и

$$I_\theta(S^3) = -1. \quad (1.38)$$

## § 1.4. Примеры вычислений

**ЛИНЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА.** Напомним некоторые сведения о трехмерных линзовых пространствах, следуя книге [14]. Пусть  $p > q > 0$ ,  $p \geq 3$  — пара взаимно простых целых чисел. Рассмотрим  $p$ -угольную бипирамиду, т.е. объединение двух конусов над правильным  $p$ -угольником. Обозначим через  $B_0, B_1, \dots, B_{p-1}$  вершины  $p$ -угольника, через  $A_0, A_q$  — вершины конусов. Для каждого  $i$  склеим грань  $B_i A_0 B_{i+1}$  с гранью  $B_{i+q} A_q B_{i+q+1}$  (индексы берутся по модулю  $p$ , и вершины склеиваются в том порядке, в котором они написаны). Получившееся пространство и есть линзовое пространство  $L(p, q)$  (рис. 1.4).

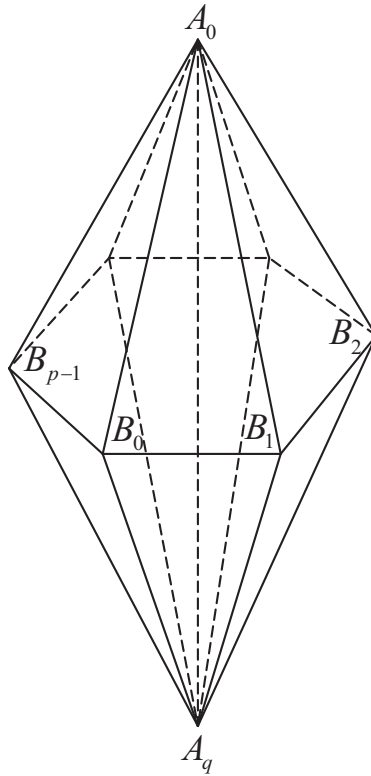


Рис. 1.4. Линзовое пространство  $L(p, q)$

Полезно также другое определение линзового пространства. Представим сферу  $S^3$  в виде подмножества  $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$  пространства  $\mathbb{C}^2$ . Линзовое пространство  $L(p, q)$  определяется как  $S^3 / \sim$ , где  $\sim$  означает следующее действие циклической группы  $\mathbb{Z}_p$  на  $S^3$ :

$$\zeta \cdot (z_1, z_2) = (\zeta z_1, \zeta^q z_2), \quad \zeta = e^{2\pi i/p}. \quad (1.39)$$

Как следствие, универсальная накрывающая линзового пространства гомеоморфна сфере  $S^3$  и

$$\pi_1(L(p, q)) \cong H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p. \quad (1.40)$$

Известно, что  $L(p, q)$  является замкнутым ориентируемым многообразием. Как показал К. Райдемайстер, справедлива следующая теорема классификации.

**Теорема 1.21** ([62]). *Линзовые пространства  $L(p, q)$  и  $L(p', q')$  гомеоморфны тогда и только тогда, когда  $p' = p$  и  $q' = \pm q^{\pm 1} \pmod p$ .*

Пусть  $g$  — образующая группы  $\mathbb{Z}_p$ . Рассмотрим представление

$$\rho_k: g \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{p} & \sin \frac{2\pi k}{p} & 0 \\ -\sin \frac{2\pi k}{p} & \cos \frac{2\pi k}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, p-1, \quad (1.41)$$

которое переводит  $g$  в поворот на угол  $\frac{2\pi k}{p}$  вокруг оси  $z$  в трехмерном евклидовом пространстве.

Вычислим значение инварианта  $I_k(L(p, q))$  для линзового пространства  $L(p, q)$  и представления  $\rho_k$ , определенного в (1.41).

Зафиксируем декартову систему координат  $Oxyz$ . Вершины фундаментального семейства удобно поместить в точки  $A_0(\cos \alpha, \sin \alpha, 1)$  и  $B_0(1, 0, 0)$ , где  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k(q-1)}{p}$ . Найдем чему равны объемы (помноженные на 6) всех согласованно ориентированных тетраэдров, входящих в триангуляцию:

$$V_i \equiv V_{B_i B_{i+1} A_0 A_q} = \begin{vmatrix} x_{A_0} - x_{A_q} & y_{A_0} - y_{A_q} & z_{A_0} - z_{A_q} \\ x_{A_0} - x_{B_i} & y_{A_0} - y_{B_i} & z_{A_0} - z_{B_i} \\ x_{A_0} - x_{B_{i+1}} & y_{A_0} - y_{B_{i+1}} & z_{A_0} - z_{B_{i+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{A_0} - x_{A_q} & y_{A_0} - y_{A_q} & 0 \\ x_{B_i} & y_{B_i} & -z_{A_0} \\ x_{B_{i+1}} & y_{B_{i+1}} & -z_{A_0} \end{vmatrix} = \quad (1.42)$$

$$z_{A_0}(x_{A_0} - x_{A_q})(y_{B_{i+1}} - y_{B_i}) - z_{A_0}(y_{A_0} - y_{A_q})(x_{B_{i+1}} - x_{B_i}) = 4 \sin \frac{\pi k}{p} \sin \frac{\pi q k}{p} \cos \frac{2\pi k i}{p},$$

где индекс  $i$  пробегает значения от 0 до  $p-1$  и  $B_p = B_0$ .

Согласно предложению 1.9, пространство  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  порождается двумя генераторами алгебры  $\mathfrak{e}(3)$ , которые мы будем обозначать  $d\varphi_z$  и  $dz$  — бесконечно малое вращение вокруг оси  $z$  и бесконечно малый сдвиг вдоль этой оси соответственно, т.е.  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B}_0 = \{d\varphi_z, dz\}$ .

Базис пространства  $(dx)$  состоит из дифференциалов евклидовых координат двух вершин  $A_0$  и  $B_0$ . Выберем

$$\mathcal{B}_1 = \{dz_{B_0}, dx_{A_0}\}.$$

Тогда прямое вычисление дает:

$$\det_{\mathcal{B}_1} f_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y_{A_0} & 0 \end{vmatrix} = -\cos \frac{\pi k(q-1)}{p}. \quad (1.43)$$

Поскольку фундаментальная группа линзового пространства конечна, то пространство  $(dg)$  тривиально.

Пространство  $(dL)$  имеет размерность  $p+2$ , множество его базисных векторов имеет вид:

$$\mathcal{C}_2 = \{dL_{B_0B_1}, dL_{A_0B_0}, \dots, dL_{A_0B_{p-1}}, dL_{A_0A_q}\},$$

Выберем подмножество  $\mathcal{B}_2$  в виде:

$$\mathcal{B}_2 = \{dL_{B_0B_1}, dL_{A_0B_{q-1}}, dL_{A_0B_{p-1}}, dL_{A_0A_q}\}.$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{B}_2 f_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial L_{B_0 B_1}}{\partial x_{B_0}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_{A_0 B_{q-1}}}{\partial x_{B_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{q-1}}}{\partial y_{B_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{q-1}}}{\partial y_{A_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{q-1}}}{\partial z_{A_0}} \\ \frac{\partial L_{A_0 B_{p-1}}}{\partial x_{B_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{p-1}}}{\partial y_{B_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{p-1}}}{\partial y_{A_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{p-1}}}{\partial z_{A_0}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_{A_0 A_q}}{\partial y_{A_0}} & 0 \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{\partial L_{B_0 B_1}}{\partial x_{B_0}} \frac{\partial L_{A_0 A_q}}{\partial y_{A_0}} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_{A_0 B_{q-1}}}{\partial y_{B_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{q-1}}}{\partial z_{A_0}} \\ \frac{\partial L_{A_0 B_{p-1}}}{\partial y_{B_0}} & \frac{\partial L_{A_0 B_{p-1}}}{\partial z_{A_0}} \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{\partial L_{B_0 B_1}}{\partial x_{B_0}} \frac{\partial L_{A_0 A_q}}{\partial y_{A_0}} \frac{\partial (L_{A_0 B_{p-1}} - L_{A_0 B_{q-1}})}{\partial y_{B_0}} z_{A_0} = \\
&= 32 x_{B_0} y_{A_0} z_{A_0} \sin^2 \frac{\pi k}{p} \sin^3 \frac{\pi k q}{p} \left( x_{A_0} \cos \frac{\pi k (q-2)}{p} - y_{A_0} \sin \frac{\pi k (q-2)}{p} \right) = \\
&= -32 \sin^2 \frac{\pi k}{p} \sin^3 \frac{\pi k q}{p} \cos \frac{\pi k (q-1)}{p} \sin \frac{\pi k (2q-3)}{p}.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

**Теорема 1.22.** *Инвариант  $I_k(L(p, q))$  для линзового пространства  $L(p, q)$  и представления  $\rho_k$ , определенного в (1.41), имеет вид:*

$$I_k(L(p, q)) = -\frac{1}{p^2} \left( 4 \sin \frac{\pi k}{p} \sin \frac{\pi k q}{p} \right)^4. \tag{1.45}$$

*Доказательство.* Напомним, что  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{B}_2$ . Найдем чему равен  $\det \mathcal{B}_3 f_3$ . Для этого определим подматрицу  $f'_3 = c'_2 f_3$  как ограничение матрицы  $f_3$  на подмножество

$$\mathcal{C}'_2 = \{dL_{A_0 B_i} \mid i = 0, \dots, p-1\}.$$

Выпишем все ненулевые элементы матрицы  $f'_3$ . Поскольку  $f'^T_3 = f'_3$ , то нам достаточно выписать  $(f'_3)_{i,j}$  для  $j \geq i$ .

Начнем с диагональных элементов. Вокруг ребра  $A_0 B_i$  сосредоточено четыре тетраэдра:  $B_{i-1} B_i A_0 A_q$ ,  $B_i B_{i+1} A_0 A_q$ ,  $B_{i+q-1} B_{i+q} A_0 A_q$  и  $B_{i+q} B_{i+q+1} A_0 A_q$ . Поэтому для нахождения  $(f'_3)_{i,i} = \frac{1}{l^2_{A_0 B_i}} \frac{\partial \omega_{A_0 B_i}}{\partial l_{A_0 B_i}}$  можно воспользоваться форму-



лой (1.7):

$$(f'_3)_{i,i} = - \left( \frac{V_{A_q B_{i-1} B_i B_{i+1}} V_{B_{i+1} B_{i-1} A_0 A_q}}{V_{i-1} V_i V_{B_{i-1} B_i B_{i+1} A_0}} + \frac{V_{A_q B_{i+q-1} B_{i+q} B_{i+q+1}} V_{B_{i+q+1} B_{i+q-1} A_0 A_q}}{V_{i+q-1} V_{i+q} V_{B_{i+q-1} B_{i+q} B_{i+q+1} A_0}} \right).$$

Заметим, что это выражение можно упростить, если учесть очевидные равенства:

$$V_{A_q B_{i-1} B_i B_{i+1}} = V_{B_{i-1} B_i B_{i+1} A_0}, \quad V_{A_q B_{i-1} B_i B_{i+1}} = V_{B_{i-1} B_i B_{i+1} A_0}$$

и

$$V_{B_{i+1} B_{i-1} A_0 A_q} = V_{i-1} + V_i, \quad V_{B_{i+q+1} B_{i+q-1} A_0 A_q} = V_{i+q-1} + V_{i+q}.$$

Тогда получаем

$$(f'_3)_{i,i} = -\frac{1}{V_{i-1}} - \frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_{i+q-1}} - \frac{1}{V_{i+q}}.$$

Аналогично, используя формулы (1.3)–(1.7), можно найти значения остальных ненулевых элементов матрицы  $f'_3$ :

$$(f'_3)_{i,i+1} = \frac{1}{V_i} + \frac{1}{V_{i+q}},$$

$$(f'_3)_{i,i+q-1} = \frac{1}{V_{i+q-1}},$$

$$(f'_3)_{i,i+q} = -\frac{1}{V_{i+q-1}} - \frac{1}{V_{i+q}},$$

$$(f'_3)_{i,i+q+1} = \frac{1}{V_{i+q}}.$$

Определим вспомогательную матрицу  $\Phi_3 = \Phi_3^T$ , ненулевые элементы которой имеют вид:

$$(\Phi_3)_{i,i} = -\frac{1}{V_{i-1}} - \frac{1}{V_i},$$

$$(\Phi_3)_{i,i+1} = \frac{1}{V_i},$$

$$(\Phi_3)_{i,i-1} = \frac{1}{V_{i-1}}.$$

Тогда матрицу  $f'_3$  можно представить как

$$f'_3 = \Phi_3 + E^q \Phi_3 E^{-q} - E^q \Phi_3 - \Phi_3 E^{-q} = (\mathbf{1}_p - E^q) \Phi_3 (\mathbf{1}_p - E^{-q}), \quad (1.46)$$

где  $\mathbf{1}_p$  — единичная матрица размера  $p \times p$  и

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

В матрице  $E$  циклическая диагональ, расположенная над главной, занята единицами, а все остальные элементы равны нулю.

Учитывая также, что

$$\Phi_3 = (\mathbf{1}_p - E^{-1}) \begin{pmatrix} \frac{1}{V_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{V_{p-1}} \end{pmatrix} (\mathbf{1}_p - E),$$

окончательно получаем

$$f'_3 = S_q S_{-1} R S_1 S_{-q}, \quad (1.48)$$

где мы обозначили

$$S_i = \mathbf{1}_p - E^i, \quad R = \text{diag}(V_0^{-1}, V_1^{-1}, \dots, V_{p-1}^{-1}). \quad (1.49)$$

Мы воспользуемся полученной факторизацией (1.48) матрицы  $f'_3$  для того, чтобы с помощью элементарных преобразований, сохраняющих определитель, упростить матрицу  $\mathcal{B}_3 f'_3$ . Подмножество  $\mathcal{B}_3$  выбрано таким образом, что матрица  $S_q$  в (1.48) теряет  $q$ -ю и последнюю строки. При этом,  $q$ -й столбец этой матрицы становится нулевым — его можно также вычеркнуть и одновременно вычеркнуть  $q$ -ю строку в матрице  $S_{-1}$ .

Обозначим преобразованные матрицы как  $\tilde{S}_q$  и  $\tilde{S}_{-1}$ . Тогда, прибавляя строки в матрице  $\tilde{S}_q$ , приводим ее к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее, перемножая матрицы  $\tilde{S}_q$  и  $\tilde{S}_{-1}$  и проделывая элементарные преобразования над строками полученной матрицы размера  $(p-2) \times p$  так, чтобы первые  $p-2$  столбца образовали единичную матрицу, получаем:

$$\tilde{S}_q \tilde{S}_{-1} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p-2} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Здесь компоненты столбцов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют вид:

$$\mathbf{a}_i = \begin{cases} i, & i = 1, \dots, q-1, \\ i-p, & i = q, \dots, p-2, \end{cases} \quad (1.50)$$

$$\mathbf{b}_i = -1 - \mathbf{a}_i. \quad (1.51)$$

Теперь, учитывая симметричную форму (1.48) матрицы  $f'_3$ , получаем

$$\mathcal{B}_3 f_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p-2} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p-2} \\ \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} = R' \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p-2} & \frac{\mathbf{a}'}{V_{p-2}} & \frac{\mathbf{b}'}{V_{p-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p-2} \\ \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

где  $\mathbf{a}' = R'^{-1} \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}' = R'^{-1} \mathbf{b}$  и  $R' = \text{diag}(V_0^{-1}, V_1^{-1}, \dots, V_{p-3}^{-1})$ .

Обозначим

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p-2} & \frac{\mathbf{a}'}{V_{p-2}} & \frac{\mathbf{b}'}{V_{p-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{p-2} \\ \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{p-2} + \frac{1}{V_{p-2}} \mathbf{a}' \otimes \mathbf{a}^T + \frac{1}{V_{p-1}} \mathbf{b}' \otimes \mathbf{b}^T.$$

**Лемма 1.23.** Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — столбцы,  $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$  — строки одинаковой размерности, состоящие из вещественных чисел. Тогда, ненулевые собственные значения матрицы  $S = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}' + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}'$  совпадают с собственными значениями матрицы

$$s = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'\mathbf{a} & \mathbf{a}'\mathbf{b} \\ \mathbf{b}'\mathbf{a} & \mathbf{b}'\mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Образ матрицы  $S$  (как линейного оператора) порождается векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , и значит, собственные векторы этой матрицы имеют вид  $\mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$ , где  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Поэтому,

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}' + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}')(\mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}) = (\mu\mathbf{a}'\mathbf{a} + \nu\mathbf{a}'\mathbf{b})\mathbf{a} + (\mu\mathbf{b}'\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}'\mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{a}'\mathbf{a} & \mathbf{a}'\mathbf{b} \\ \mathbf{b}'\mathbf{a} & \mathbf{b}'\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если  $\mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$  — собственный вектор матрицы  $S$ , соответствующий собственному значению  $\lambda$ , то  $(\mu, \nu)$  — собственный вектор матрицы  $s$  с тем же собственным значением  $\lambda$ . Лемма 1.23 доказана.  $\square$

По лемме 1.23, собственные значения матрицы  $\frac{1}{V_{p-2}}\mathbf{a}' \otimes \mathbf{a}^T + \frac{1}{V_{p-1}}\mathbf{b}' \otimes \mathbf{b}^T$  ранга два, есть:

$$0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения матрицы размера  $2 \times 2$  вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{V_{p-2}}\mathbf{a}^T\mathbf{a}' & \frac{1}{V_{p-1}}\mathbf{a}^T\mathbf{b}' \\ \frac{1}{V_{p-2}}\mathbf{b}^T\mathbf{a}' & \frac{1}{V_{p-1}}\mathbf{b}^T\mathbf{b}' \end{pmatrix}.$$

Поэтому определитель матрицы  $P$  равен

$$\begin{aligned} \det P &= \frac{1}{V_{p-2}V_{p-1}} \begin{vmatrix} V_{p-2} + \mathbf{a}^T \mathbf{a}' & \mathbf{a}^T \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}^T \mathbf{a}' & V_{p-1} + \mathbf{b}^T \mathbf{b}' \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{V_{p-2}V_{p-1}} \begin{vmatrix} V_{p-2} + \mathbf{a}^T \mathbf{a}' & V_{p-2} - \sum \mathbf{a}'_i \\ V_{p-2} - \sum \mathbf{a}'_i & 0 \end{vmatrix} = -\frac{(V_{p-2} - \sum \mathbf{a}'_i)^2}{V_{p-2}V_{p-1}} = \\ &= -\frac{1}{V_{p-2}V_{p-1}} \left( p \sum_{i=q}^{p-1} V_{i-1} - \sum_{i=1}^{p-1} iV_{i-1} \right)^2 = -\frac{4p^2}{V_{p-2}V_{p-1}} \sin^2 \frac{\pi k q}{p} \sin^2 \frac{\pi k(2q-3)}{p}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Второе равенство справедливо в силу того, что  $\mathbf{b}_i = -1 - \mathbf{a}_i$ . Мы также учли соотношение  $\sum_{i=0}^{p-1} V_i = 0$ , которое нетрудно получить из (1.42).

Таким образом мы находим

$$\det \mathcal{B}_3 f_3 = \frac{1}{\prod_{i=0}^{p-3} V_i} \det P = -\frac{4p^2}{\prod_{i=0}^{p-1} V_i} \sin^2 \frac{\pi k q}{p} \sin^2 \frac{\pi k(2q-3)}{p}.$$

Объединяя это с найденными ранее выражениями (1.43) и (1.44) для  $\det \mathcal{B}_1 f_1$  и  $\det \mathcal{B}_2 f_2$ , находим кручение комплекса (1.17) и затем, по формуле (1.21), получаем значение инварианта (1.45). Теорема 1.22 доказана.  $\square$

*Замечание 1.5.* Пусть  $aq + bp = 1$ ,  $\zeta$  — корень  $p$ -й степени из единицы. Тогда кручение Райдемайстера для пространства  $L(p, q)$  определяется по формуле ([19, теорема 10.6]):

$$\tau_R(L(p, q)) = (1 - \zeta)^{-1} (1 - \zeta^a)^{-1}.$$

Сравнивая это выражение с (1.45), получаем, что для данного  $p$ , формула (1.45) с точностью до умножения на константу дает  $|\tau_R(L(p, q))|^{-4}$ .

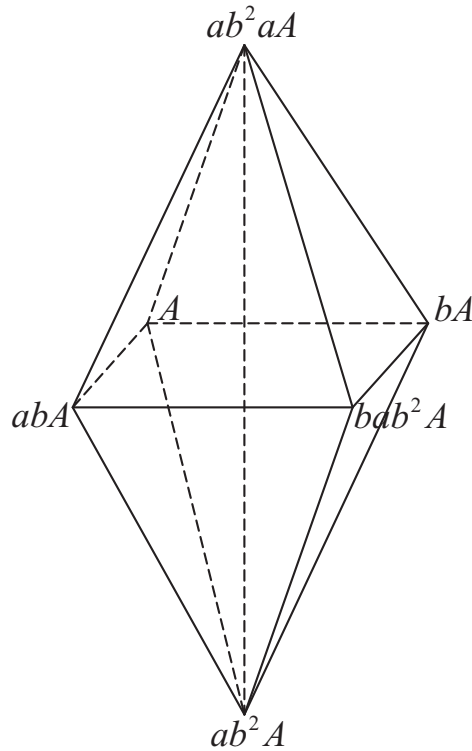


Рис. 1.5. Фундаментальное семейство 3-симплексов для универсального накрытия пространства  $S^3/P_{24}$

ПРОСТРАНСТВО  $S^3/P_{24}$ . Многообразие  $S^3/P_{24}$  получается приклеиванием каждой грани октаэдра к противоположной по суперпозиции параллельного переноса и поворота на угол  $\frac{\pi}{3}$ . Добавив к октаэдру новое ребро, соединяющее две его противоположные вершины, получим триангуляцию многообразия  $S^3/P_{24}$ .

Напомним, что фундаментальная группа  $\pi_1(S^3/P_{24}) \cong P_{24}$  и ее копредставление имеет вид:

$$P_{24} = \{a, b \mid a^2 = (ab)^3 = b^3, a^4 = 1\}.$$

На рисунке 1.5 изображено фундаментальное семейство 3-симплексов для универсального накрытия многообразия  $S^3/P_{24}$ . Запись вида  $abA$  означает действие элемента  $ab$  группы  $P_{24}$  на вершине  $A$ .

Рассмотрим представление  $\rho: P_{24} \rightarrow \text{SO}(3)$  такое, что  $\text{Tr } \rho(a) = 1 +$

$2 \cos(\pi)$ ,  $\text{Tr } \rho(b) = 1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{3})$ . Другими словами, мы фиксируем оси, идущие через начало координат в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда  $\rho(a)$  — это вращение вокруг одной из этих осей на угол  $\pi$ , а  $\rho(b)$  — вращение вокруг другой оси на угол  $\frac{2\pi}{3}$ . Матрицы  $\rho(a)$  и  $\rho(b)$  сопряжены вращением на некоторый угол  $\varphi$ . Соотношения группы накладывают ограничения на возможные значения угла  $\varphi$ .

Очевидно, что  $\rho(a)^2 = \rho(b)^3 = \mathbf{1}_3, \forall \varphi$ . В то же время, простое вычисление показывает, что наибольший общий делитель элементов матрицы  $(\rho(a)\rho(b))^3 - \rho(a)^2$  есть  $3 \cos^2 \varphi - 1$ . Отсюда следует, что  $\varphi = \arccos(\pm \frac{\sqrt{3}}{3})$ .

Представление  $\rho$  имеет нетривиальное ядро:  $\text{Ker } \rho \cong \mathbb{Z}_2$ . Соответствующее ему накрытие имеет вид:

$$p_\rho: S^3/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}P^3 \rightarrow S^3/P_{24},$$

где  $\mathbb{R}P^3$  — 3-мерное проективное пространство.

*Замечание 1.6.* Группа  $\text{Im } \rho \cong P_{24}/\mathbb{Z}_2$  изоморфна группе сохраняющих ориентацию симметрий правильного тетраэдра. Элемент  $\rho(b)$  соответствует симметрии относительно вращения на угол  $\frac{2\pi}{3}$  вокруг высоты тетраэдра, элемент  $\rho(a)$  соответствует симметрии относительно вращения на угол  $\pi$  вокруг оси, проходящей через середины скрещивающихся ребер.

Пусть единственная вершина  $A$  фундаментального семейства имеет координаты  $(1, 1, 0)$ . Тогда ушестеренные объемы ориентированных тетраэдров фундаментального семейства имеют вид:

$$-V_{A,abA,ab^2aA,ab^2A} = -V_{abA,bab^2A,ab^2aA,ab^2A} =$$

$$V_{bab^2A,bA,ab^2aA,ab^2A} = V_{bA,A,ab^2aA,ab^2A} = 4\sqrt{2}.$$

Обратимся к ациклическому комплексу (1.17). Согласно предложению 1.9, пространство  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  в данном случае тривиально.

Пространство  $(dx)$  трехмерно и порождается дифференциалами трех декартовых координат вершины  $A$ . В силу конечности группы  $P_{24}$ , пространство  $(dg) = 0$ .

Пространство  $(dL)$  пятимерно. В качестве  $\mathcal{B}_2$  возьмем

$$\{dL_{bab^2A,ab^2aA}, dL_{bab^2A,abA}, dL_{bab^2A,ab^2A}\}.$$

Тогда, непосредственное вычисление показывает, что

$$\det_{\mathcal{B}_2} f_2 = 16\sqrt{2}, \quad \det_{\mathcal{B}_3} f_3 = -\frac{1}{8},$$

где  $\mathcal{B}_3 = \{d\Omega_{A,ab^2A}, d\Omega_{ab^2aA,ab^2A}\}$ . Отсюда получаем:

$$I_\rho(S^3/P_{24}) = -\frac{(\det_{\mathcal{B}_2} f_2)^2}{\det_{\mathcal{B}_3} f_3 \prod(-V)} = -\frac{(16\sqrt{2})^2}{-1/8 (4\sqrt{2})^4} = 4.$$

ПРОСТРАНСТВО  $S^2 \times S^1$ . Пространство  $S^2 \times S^1$  — прямое произведение двумерной сферы на окружность — получается склейкой двух полноторий по тождественному гомеоморфизму их краев.  $S^2 \times S^1$  является замкнутым ориентируемым трехмерным многообразием, фундаментальная группа которого изоморфна  $\mathbb{Z}$  — свободной группе с одной образующей.

Построим триангуляцию многообразия  $S^2 \times S^1$  следующим образом. Возьмем треугольную призму с основаниями  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$ . Разобьем ее на тетраэдры, добавив три новых ребра  $A_1B_0$ ,  $A_1C_0$  и  $B_0C_1$ , и склеим основания призмы по тождественному гомеоморфизму. Таким образом мы получим триангуляцию полнотория  $D^2 \times S^1$ . Взяв еще одну копию этой триангуляции и приклеив ее к исходной по тождественному гомеоморфизму, мы получим триангуляцию



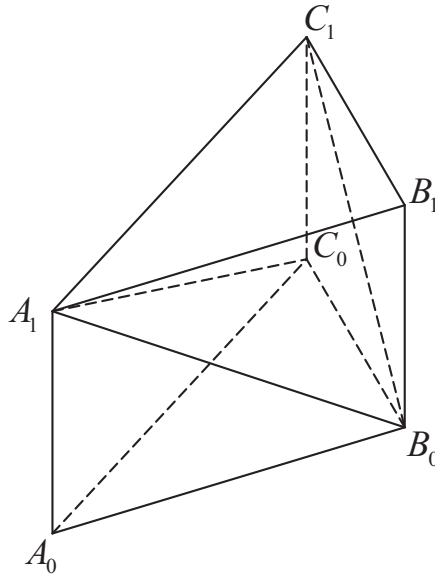


Рис. 1.6. Фундаментальное семейство 3-симплексов для пространства  $D^2 \times S^1$  пространства  $S^2 \times S^1$ , состоящую из трех вершин, девяти ребер, двенадцати 2-симплексов и шести тетраэдров (рис. 1.6).

Обозначим  $g$  образующую группы  $\mathbb{Z}$ . Инъективный гомоморфизм  $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow E(3)$  наиболее общего вида посылает  $g$  в суперпозицию поворота вокруг фиксированной оси на произвольный угол  $\gamma \neq 0 \pmod{2\pi}$  и сдвига вдоль этой оси на произвольную величину  $h$ .

В соответствии с общей схемой, поместим универсальное накрывающее пространство  $S^2 \times \mathbb{R}$  в трехмерное евклидово пространство. Зафиксируем декартову систему координат  $(x, y, z)$  в  $\mathbb{R}^3$ . Вершины фундаментального семейства  $A_0, B_0$  и  $C_0$  поместим в точки  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, 0)$  соответственно. Тогда ушестеренные объемы ориентированных тетраэдров определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_{A_0B_0C_0A_1} &= V_{B_0A_1B_1C_1} = h, \\ V_{B_0C_0A_1C_1} &= h(\cos \gamma + \sin \gamma). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Согласно предложению 1.9, пространство  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  комплекса (1.17) двумерно,

его базис состоит из  $d\varphi_z$  и  $dz$  — бесконечно малого поворота вокруг оси  $z$  и бесконечно малого сдвига вдоль этой оси соответственно. Поэтому  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B}_0 = \{d\varphi_z, dz\}$ .

Пространство  $(dg)$  двумерно, его базис состоит из дифференциалов  $d\gamma$  и  $dh$  параметров представления.

Пространство  $(dx)$  девятимерно и порождается дифференциалами декартовых координат вершин  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$ . Выберем

$$\mathcal{B}_1 = \{dy_{B_0}, dz_{B_0}\}.$$

Тогда

$$\det_{\mathcal{B}_1} f_1 = \begin{vmatrix} -x_{B_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Пространство  $(dL)$  девятимерно. Отсюда следует, что  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{C}_2$ . Вычисление определителя подматрицы  ${}_{\mathcal{B}_2}f_2$  размера  $9 \times 9$  приводит к следующему результату:

$$\det_{\mathcal{B}_2} f_2 = h^3(2 - 2 \cos \gamma)^2(\cos \gamma + \sin \gamma). \quad (1.55)$$

Множество  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{B}_2$  пусто. Поэтому

$$\det_{\mathcal{B}_3} f_3 = 1.$$

Подставляя найденные значения для определителей базисных миноров в (1.20), находим кручение комплекса (1.17) и затем, по формуле (1.21), получаем значение инварианта:

$$I_{\gamma, h}(S^2 \times S^1) = (2 - 2 \cos \gamma)^4. \quad (1.56)$$

## Глава 2. Модификация геометрического инварианта для зацеплений

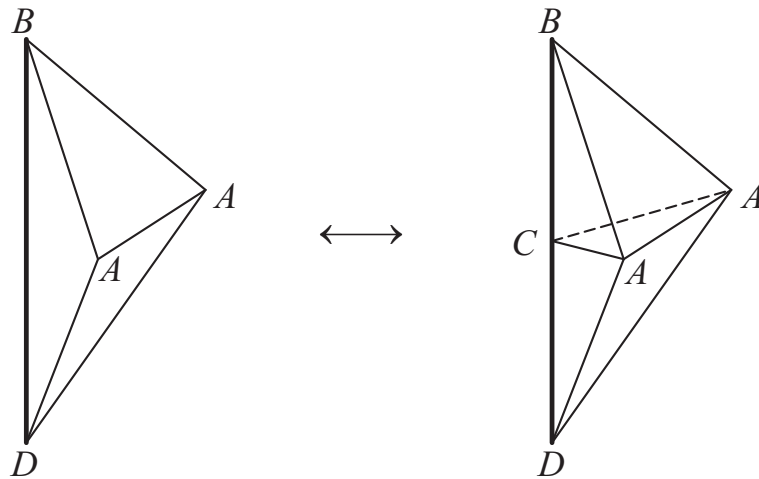
### § 2.1. Триангуляции разветвленных накрытий 3-сферы

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. Пусть  $L$  — снабженное ориентацией зацепление, лежащее в сфере  $S^3$ . Рассмотрим триангуляцию этой сферы, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) все зацепление  $L$  лежит на некоторых ребрах триангуляции;
- 2) не более чем две вершины любого тетраэдра триангуляции принадлежат  $L$ ;
- 3) вершины любого ребра  $e$  триангуляции либо различны, либо совпадают, причем в последнем случае  $e$  представляет меридиан соответствующей компоненты зацепления и  $|\text{lk}(e, L)| = 1$ .

Ребра с совпадающими вершинами из условия 3) нам нужны для описания следующих преобразований триангуляции. Пусть ребро  $BD$  лежит на некоторой компоненте зацепления, и пусть триангуляция содержит тетраэдр  $BDAА$  с ребром  $AA$ , обходящим ровно один раз вокруг соответствующей компоненты зацепления. Возьмем точку  $C$  на ребре  $BD$  и заменим тетраэдр  $BDAА$  на два тетраэдра  $BCAA$  и  $CDAА$ . Полученное преобразование назовем движением  $1 \rightarrow 2$ . Движение  $2 \rightarrow 1$  определяется как обратное к нему (рис. 2.1).

В работе И.Г. Корепанова [12] показано, что движений  $1 \leftrightarrow 2$  в совокупности с движениями Пахнера достаточно для того, чтобы преобразовать

Рис. 2.1. Движения  $1 \leftrightarrow 2$ 

одну триангуляцию сферы со свойствами 1) – 3) в любую другую с теми же свойствами. Таким образом, мы получаем следующий аналог теоремы Пахнера (теорема 0.1 во введении):

**Теорема 2.1** ([12]). *Для заданного зацепления  $L$  любые две триангуляции сферы  $S^3$  со свойствами 1) – 3) связаны конечной последовательностью следующих элементарных движений:*

- *движения Пахнера  $2 \leftrightarrow 3$  и  $1 \leftrightarrow 4$ . Такие движения не должны затрагивать ребер, лежащих на зацеплении  $L$  (однако, зацепление может проходить через ребра и/или вершины, лежащие на границе преобразуемого кластера тетраэдров);*
- *движения  $1 \leftrightarrow 2$ .*

Идея доказательства этой теоремы основана на классических результатах комбинаторной топологии (см. например [47]). Согласно этим результатам, любое подразделение симплициального комплекса может быть получено из исходного комплекса конечной последовательностью так называемых звездных

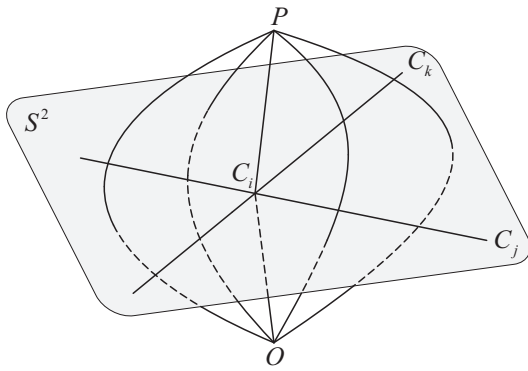
движений. Они вводят новую или убирают старую вершину во внутренней точке симплекса некоторой размерности. С другой стороны, можно показать, что применительно к нашей ситуации эти движения представляются в виде конечных последовательностей движений Пахнера и  $1 \leftrightarrow 2$ .

Пусть имеются две триангуляции сферы с зацеплением, удовлетворяющие условиям 1) – 3). Сначала мы подразделяем каждую из них до комбинаторной триангуляции, в которой линк любой вершины является триангулированной 2-сферой. При этом, требуется, чтобы не возникало ребер, не лежащих полностью на зацеплении, оба конца которых лежат на нем. Для этого можно использовать первое производное подразделение, которое легко выражается через звездные движения и затем через движения Пахнера и  $1 \leftrightarrow 2$ . Наконец, мы строим последовательность звездных движений для каждой триангуляции, переводящую ее в заведомо существующее общее симплициальное подразделение.

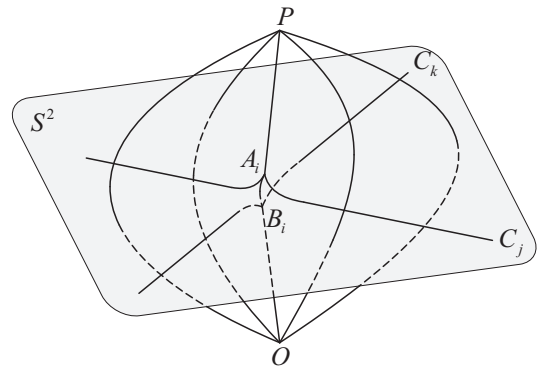
**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ 3-СФЕРЫ.** Для определения инварианта нам необходимо симплициальное разбиение 3-сферы  $S^3$ , удовлетворяющее условиям 1) – 3). Существует общий алгоритм, позволяющий построить такое разбиение для произвольного зацепления. Опишем его.

Пусть  $r$  — количество самопересечений диаграммы зацепления. Из того, что эйлерова характеристика двумерной сферы равна 2 следует, что диаграмма зацепления делит плоскость на  $r + 2$  части.

Обозначим  $C_i$   $i$ -ю точку самопересечения диаграммы. Пусть плоскость с диаграммой зацепления есть плоскость  $z = 0$  в  $\mathbb{R}^3$ . Выберем в области  $z < 0$  точку  $O$ , а в области  $z > 0$  точку  $P$ . Над каждым из  $r + 2$  многоугольников



(a) Исходная триангуляция

(b) Преобразованная триангуляция (на рисунке отсутствуют два ребра  $A_iO$  и два ребра  $B_iP$ )Рис. 2.2. Преобразование триангуляции 3-сферы в окрестности точки  $C_i$ 

на плоскости возьмем “бипирамиду” (двусторонний конус) с вершинами  $O$  и  $P$ . Добавив еще  $r + 2$  ребер  $OP$  (по одному на каждую “бипирамиду”) и компактифицировав  $\mathbb{R}^3$  добавлением точки  $\{\infty\}$ , мы получим триангуляцию сферы  $S^3$ , состоящую из  $4r$  тетраэдров.

Далее, в окрестности каждой точки  $C_i$  сделаем преобразование полученной триангуляции, смысл которого ясен из рисунка 2.2. Мы заменяем вершину  $C_i$  отрезком  $A_iB_i$ , полагая, что точка  $A_i$  находится над  $B_i$ . При этом преобразовании тетраэдры вида  $C_iC_jOP$  переходят в  $A_iC_jOP$ , а тетраэдры  $C_iC_kOP$  — в  $B_iC_kOP$ . Кроме того, образуются еще четыре тетраэдра вида  $A_iB_iOP$ .

Проделав описанное преобразование для всех  $i = 1, \dots, r$ , мы получим искомую триангуляцию сферы  $S^3$ , по ребрам которой проходит зацепление  $L$ , причем очевидно, что для полученной триангуляции выполнены условия 1) — 3).

Таким образом, множество вершин (0-симплексов) построенной триангуляции состоит из  $2r + 2$  элементов:  $A_i, B_i, O, P$ , где  $i = 1, \dots, r$ .

Множество ребер триангуляции разбивается на четыре подмножества:

- 1)  $2r$  ребер, лежащих на зацеплении;
- 2)  $r$  ребер  $A_iB_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ ;
- 3)  $6r$  ребер  $A_iO$ ,  $A_iO$ ,  $A_iP$ ,  $B_iO$ ,  $B_iP$ ,  $B_iP$ ,  $i = 1, \dots, r$ ;
- 4)  $r + 2$  ребер  $OP$ .

Общее количество ребер (1-симплексов) в триангуляции равно  $10r + 2$ .

Каждому ребру  $A_iB_j$  (либо  $A_iA_j$ , либо  $B_iB_j$ ) из первого подмножества соответствуют два 3-симплекса вида  $A_iB_jOP$  (соотв.  $A_iA_jOP$ , соотв.  $B_iB_jOP$ ). Каждому ребру  $A_iB_i$  из второго подмножества соответствуют четыре 3-симплекса вида  $A_iB_iOP$ . Таким образом, общее количество 3-симплексов в триангуляции равно  $8r$ .

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ВДОЛЬ ЗАЦЕПЛЕНИЙ НАКРЫТИЯ 3-СФЕРЫ.

**Определение 2.1.** Пусть  $M$  и  $N$  — пара триангулированных замкнутых ориентируемых 3-многообразий и пусть зацепление  $L$  составлено из ребер триангуляции многообразия  $N$ . *Разветвленным накрытием* вдоль зацепления  $L$  называется такое непрерывное отображение  $p: M \rightarrow N$ , что прообраз  $p^{-1}(L)$  является одномерным подкомплексом в  $M$ , причем ограничение  $p$  на  $M \setminus p^{-1}(L)$  является обычным накрытием.

Согласно результату Р. Фокса [33], разветвленное накрытие единственным образом определяется своим обычным накрытием. Пусть мы имеем *нетривиальное* представление  $\rho: \pi L \rightarrow E(3)$  группы зацепления в группе  $E(3)$  (напомним, что через  $E(3)$  мы обозначаем группу сохраняющих ориентацию движений

3-мерного евклидова пространства). Тогда, нормальной подгруппе  $\text{Ker } \rho$  соответствует единственное разветвленное накрытие  $p_\rho: \tilde{S}^3 \rightarrow S^3$  вдоль зацепления  $L$ , кратность которого равна индексу подгруппы  $\text{Ker } \rho$ .

*Замечание 2.1.* Пусть  $\pi L = \langle x_1, \dots, x_r \mid R_1, \dots, R_{r-1} \rangle$  — копредставление Виртингера группы зацепления. Назовем *переходом* компоненту связности диаграммы зацепления  $L$ . Напомним, что каждый переход взаимно-однозначно соответствует некоторой образующей  $x_i$ . Поэтому, если вершина  $A$  принадлежит  $i$ -му переходу, где  $i = 1, \dots, r$ , то  $x_i A = A$ . Отсюда следует, что элемент  $\rho(x_i)$  должен представляться только поворотом (без сдвигов) вокруг некоторой оси в  $\mathbb{R}^3$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения  $\rho(R_1), \dots, \rho(R_{r-1})$ . Из формы соотношений  $R_j$  следует, что поворот вокруг оси происходит на угол  $\varphi_j$ , где  $j$  — номер компоненты зацепления, которой принадлежит соответствующий переход.

**Пример 2.1.** Рассмотрим представление  $\rho$ , которое переводит каждую образующую  $x_i$  в поворот вокруг одной и той же фиксированной оси, проходящей через начало координат в  $\mathbb{R}^3$  на угол  $\varphi_j$ , где  $j$  — номер компоненты зацепления, которую обходит образующая  $x_i$ . В этом случае  $\text{Ker } \rho = [\pi L, \pi L]$ , а  $\text{Im } \rho$  — абелева подгруппа в  $\text{SO}(3)$ . Соответствующее бесконечнолистное накрытие называется *универсальным абелевым накрытием*, разветвленным вдоль зацепления  $L$ .

Фиксируем фундаментальное семейство  $\mathcal{F}$  для накрывающего пространства  $\tilde{S}^3$  (см. определение 1.2, которое теперь необходимо дополнить условием, что симплексы, из которых составлено само зацепление  $L$ , входят в  $\mathcal{F}$ ).



## § 2.2. Ациклический комплекс и инвариант зацепления

Для заданного разветвленного накрытия  $p_\rho$  мы строим отображение  $\Gamma: \tilde{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , т.е. помещаем накрывающее пространство  $\tilde{S}^3$  в  $\mathbb{R}^3$  в полной аналогии со случаем 3-многообразий. Единственное отличие состоит в том, что теперь у нас есть выделенное множество точек в базе накрытия — контур ветвления, т.е. само зацепление  $L$ . Согласно замечанию 2.1, под действием  $\Gamma$  каждый переход диаграммы зацепления отображается в отрезок на соответствующей оси в  $\mathbb{R}^3$ .

Мы вновь требуем, чтобы для всех вершин фундаментального семейства  $\mathcal{F}$  были выполнены условия общего положения, сформулированные в замечании 1.1.

Как и для 3-многообразий, обозначим  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  алгебру Ли централизатора подгруппы  $\text{Im } \rho$  группы  $E(3)$ .

Пусть  $v \in \mathcal{F}$  произвольная вершина фундаментального семейства. Определим векторное пространство  $(dx)_v$ , сопоставленное точке  $\Gamma(v)$ . Если  $\Gamma(v)$  не принадлежит зацеплению, то  $(dx)_v$  — 3-мерное вещественное пространство, порожденное формой объема  $dx_v \wedge dy_v \wedge dz_v$ , где  $dx_v, dy_v, dz_v$  — дифференциалы декартовых координат точки  $\Gamma(v)$ . В противном случае,  $(dx)_v = u_x dx_v + u_y dy_v + u_z dz_v$ , где  $(u_x, u_y, u_z)$  — единичный направляющий вектор оси, на которой лежит точка  $\Gamma(v)$ . Множеству всех вершин из  $\mathcal{F}$  сопоставим векторное пространство  $(dx) = \bigoplus_{v \in \mathcal{F}} (dx)_v$ .

Пусть  $e \in \mathcal{F}$  произвольное ребро фундаментального семейства. Пусть  $L_e = \frac{1}{2}l_e^2$ , где  $l_e$  — евклидова длина ребра  $\Gamma(e) \in \mathbb{R}^3$ . Определим векторное пространство  $(dL) = \bigoplus_{e \in \mathcal{F}} (dL_e)$ , где  $(dL_e)$  — одномерное пространство, поро-

денное дифференциалом  $dL_e$ , и прямая сумма распространяется на все ребра фундаментального семейства.

Пусть  $\omega_e$  — угол дефекта в ребре  $e$  (определение 1.1) и  $\Omega_e = \frac{\omega_e}{l_e}$ . Тогда, аналогично пространству  $(dL)$ , определим пространство  $(d\Omega) = \bigoplus_e (d\Omega)_e$ .

Обозначим  $\mathfrak{e}(3)_\rho^*$  и  $(dx)^*$  векторные пространства, фиксированные базисы которых двойственны базисам пространств  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  и  $(dx)$  соответственно.

Рассмотрим последовательность векторных пространств и отображений

$$0 \rightarrow \mathfrak{e}(3)_\rho \xrightarrow{f_1} (dx) \xrightarrow{f_2} (dL) \xrightarrow{f_3=f_3^T} (d\Omega) \xrightarrow{-f_2^T} (dx)^* \xrightarrow{f_1^T} \mathfrak{e}(3)_\rho^* \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Проведенные ниже в § 2.3 вычисления для трилистника свидетельствуют о том, что последовательность (2.1) может быть ациклическим комплексом (определение 1.5). Более того, в работе [12] доказана теорема о том, что для абелевых представлений  $\rho$  это всегда имеет место. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что для пары  $(L, \rho)$  комплекс (2.1) является ациклическим. Тогда, по аналогии с многообразиями мы можем определить инвариант зацепления через кручение этого комплекса.

Обозначим  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$  произвольным образом упорядоченные множества базисных векторов в пространствах  $\mathfrak{e}(3)_\rho$ ,  $(dx)$  и  $(dL)$  соответственно. Пусть  $\mathcal{B}_i$  — подмножество базисных векторов, принадлежащих пространству  $\text{Im } f_i$ . Обозначим  $\mathcal{B}_i f_i$  базисный минор матрицы  $f_i$ , строки которого соответствуют векторам из множества  $\mathcal{C}_{i-1} \setminus \mathcal{B}_{i-1}$ , а столбцы — векторам из множества  $\mathcal{B}_i$ . При этом мы всегда будем считать, что  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{B}_2$ . Тогда, согласно определению 1.6, кручение комплекса (2.1) имеет вид:

$$\tau = (-1)^{\text{rank } f_2} \frac{(\det_{\mathcal{B}_2} f_2)^2}{\det_{\mathcal{B}_3} f_3 (\det_{\mathcal{B}_1} f_1)^2}. \quad (2.2)$$

Определим величину

$$I_\rho(L) = \tau \cdot \frac{\prod_{j=1}^N (2 - 2 \cos \varphi_j)^{n_j}}{\prod' l^2 \cdot \prod(-V)}. \quad (2.3)$$

Здесь  $N$  — число компонент зацепления,  $n_j$  — количество вершин в триангуляции сферы  $S^3$ , принадлежащих  $j$ -ой компоненте зацепления,  $\varphi_j$  — упомянутые выше углы, параметризующие представление (поворот на угол  $\varphi_j$  вокруг перехода, принадлежащего  $j$ -ой компоненте, определяет образующую группы зацепления в копредставлении Виртингера). В знаменателе, произведение квадратов длин ребер распространяется только на те ребра из  $\mathcal{F}$ , через которые проходит зацепление. Произведение ушестеренных объемов  $V$  распространяется на все тетраэдры из  $\mathcal{F}$ .

**Теорема 2.2.** *Для фиксированного представления  $\rho$  величина  $I_\rho(L)$  является инвариантом зацепления  $L$ .*

*Доказательство.* Как и для многообразий, разобьем доказательство на несколько лемм.

**Лемма 2.3.** *Величина  $I_\rho(L)$  не зависит от выбора фундаментального семейства  $\mathcal{F}$ , а также от выбора представителя в классе эквивалентности  $[\rho]$ .*

*Доказательство* практически полностью совпадает с доказательством леммы 1.14. □

**Лемма 2.4** ([12]). *Величина  $I_\rho(L)$  не зависит от триангуляции сферы  $S^3$  со свойствами 1) – 3).*

*Доказательство.* Величина  $I_\rho(L)$  не меняется при движениях Пахнера  $2 \leftrightarrow 3$  и  $1 \leftrightarrow 4$  (доказательство практически полностью повторяет доказательство леммы 1.15). Покажем инвариантность  $I_\rho(L)$  при движениях  $1 \leftrightarrow 2$ .

Пусть тетраэдр  $BDAA$  будет как в теореме 2.1: ребро  $BD$  лежит на фиксированной компоненте зацепления  $L$ , а ребро  $AA$  есть меридиан этой компоненты. Пусть представление  $\rho: \pi L \rightarrow \text{SO}(3)$  переводит обход по  $AA$  во вращение на угол  $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$  вокруг оси  $z$ . Вершины фундаментального семейства, соответствующие началу и концу ребра  $AA$ , под действием отображения  $\Gamma$  переходят в разные точки евклидова пространства. Наша цель сейчас — изучить, как кручение комплекса (2.1) ведет себя при движении  $1 \rightarrow 2$ , описанном в параграфе 2.1. Как подсказывает форма нашего ациклического комплекса (2.1), нас должно интересовать, какие вершины, ребра и тетраэдры убираются или добавляются к симплициальному комплексу. Именно, движение  $1 \rightarrow 2$

- добавляет новую вершину  $C$ ;
- убирает ребро  $BD$  и добавляет новые ребра  $BC$ ,  $CD$  и  $CA$ ;
- убирает тетраэдр  $BDAA$  и добавляет тетраэдры  $BCAA$  и  $CDAА$ .

Соображения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 1.15, показывают, что множитель, на который кручение комплекса (2.1) умножается при движении  $1 \rightarrow 2$ , может быть вычислен из следующих “локальных” ациклических комплексов:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow (dL_{BD}) \rightarrow (d\Omega_{BD}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

и

$$0 \rightarrow (dz_C) \rightarrow (dL_{BC}, dL_{CD}, dL_{AC}) \rightarrow (d\Omega_{BC}, d\Omega_{CD}, d\Omega_{AC}) \rightarrow (dz_C)^* \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Здесь, например,  $(dz_C)$  означает одномерное пространство, состоящее просто из дифференциала координаты  $z_C$ ;  $(dL_{BC}, dL_{CD}, dL_{AC})$  есть трехмерное пространство и т. д. Мы обозначаем кручение комплекса (2.4) через  $\tau$ , а кручение комплекса (2.5) — через  $\tilde{\tau}$ . Прямое вычисление показывает, что

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tau} = -\frac{1}{2 - 2 \cos \varphi} \cdot \frac{l_{BC}^2 l_{CD}^2}{l_{BD}^2} \cdot \frac{V_{BCAA} V_{CDA A}}{V_{BDAA}}. \quad (2.6)$$

Поэтому отношение кручений “глобальных” комплексов (2.1), отвечающих триангуляциям  $S^3$ , различающимся на движение  $1 \rightarrow 2$ , тоже дается формулой (2.6).

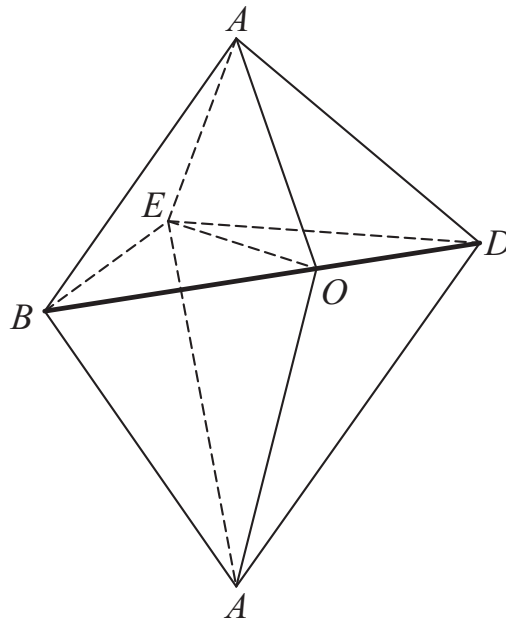
Таким образом, кручение (2.2) комплекса (2.1)

- приобретает множитель  $\frac{1}{2 - 2 \cos \varphi}$  при добавлении вершины (в нашем случае  $C$ ) на зацеплении;
- приобретает множитель  $l_i^2$  при добавлении ребра  $i$ , лежащего на зацеплении, и множитель  $l_i^{-2}$  для каждого убираемого ребра  $i$ . Отметим, что для ребер, не лежащих на зацеплении, таких множителей нет;
- приобретает множитель  $(-V)$  при добавлении тетраэдра и множитель  $(-V)^{-1}$  для каждого убираемого тетраэдра.

Все это вместе гарантирует инвариантность величины  $I_\rho(L)$  при движениях  $1 \leftrightarrow 2$ . Теперь, утверждение леммы следует из теоремы 2.1.  $\square$

**Лемма 2.5.** *Величина  $I_\rho(L)$  не зависит от отображения  $\Gamma$ , т.е. от того, в какие точки евклидова пространства мы помещаем вершины фундаментального семейства.*

*Доказательство.* Пусть  $v$  — произвольная вершина триангуляции сферы  $S^3$  и  $\tilde{v} \in \mathcal{F}$ . Если  $v$  не лежит на зацеплении, то проходят те же рассуждения, что и

Рис. 2.3. Линк вершины  $O$ 

при доказательстве леммы 1.16. Пусть  $v \in L$ . Покажем, что с помощью движений Пахнера вершину  $O = \Gamma(\tilde{v})$  можно переместить в другую точку пространства  $\mathbb{R}^3$  (принадлежащую образу того же перехода), не меняя местоположения всех остальных вершин из  $\Gamma(\mathcal{F})$ .

Сначала мы уменьшаем количество вершин в  $\text{lk}(O)$  до четырех с помощью последовательности движений Пахнера  $2 \leftrightarrow 3$  как в доказательстве леммы 1.16. При этом, в  $\text{lk}(O)$  остается в точности две вершины, скажем  $B$  и  $D$ , принадлежащие зацеплению.

Далее, пусть вершины  $A, B, D$  и  $E$  принадлежат линку вершины  $O$  так, как изображено на рисунке 2.3. Выделенные ребра  $BO$  и  $OD$  принадлежат зацеплению. В кластере из двух тетраэдров  $ABOE$  продelaем движение  $2 \rightarrow 3$ , добавив новое ребро  $AA$ . После этого, с помощью движения  $3 \rightarrow 2$  убираем ребро  $OE$  из  $\text{St}(O)$ . В результате, вокруг  $BD$  будет сосредоточено в точности два тетраэдра  $BOAA$  и  $ODAA$ .

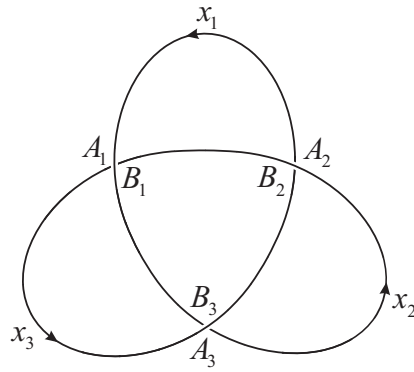


Рис. 2.4. Диаграмма трилистника

Теперь, в кластере из двух тетраэдров  $BOAA$  и  $ODAA$  мы делаем движение  $2 \rightarrow 1$  и тем самым убираем вершину  $O$  из триангуляции. После этого, с помощью движения  $1 \rightarrow 2$  возвращаем ее обратно, но уже в другую точку пространства  $\mathbb{R}^3$  (требуя при этом, чтобы по-прежнему выполнялись условия общего положения из замечания 1.1). Затем мы возвращаемся к исходному симплициальному комплексу, обращая всю последовательность движений Пахнера. Остается заметить, что на каждом шаге величина  $I_\rho(L)$  остается неизменной по лемме 2.4. □

Теорема 2.2 доказана. □

## § 2.3. Вычисления для трилистника

**СЛУЧАЙ АБЕЛЕВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.** На рисунке 2.3 показана ориентированная диаграмма трилистника  $\mathcal{Z}_1$ . Мы собираемся вычислить инвариант  $I_\rho(\mathcal{Z}_1)$  для абелева представления  $\rho$ , описанного в примере 2.1. Копредставление Виртингера группы трилистника имеет вид:

$$\pi\mathcal{Z}_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_1, x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_2 \rangle.$$

Образующие  $x_i$  однозначно соответствуют трем переходам на диаграмме, которые мы будем обозначать теми же буквами.

Под действием  $\Gamma$  каждый переход  $x_i$  отображается в отрезок на одной и той же оси  $z$ . Вращение вокруг этой оси на угол  $\varphi_1$  задает абелево представление группы  $\pi\mathbb{Z}_1$  в  $SO(3)$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{e}(3)_\rho$  двумерна, ее базис состоит из  $d\varphi_z$  и  $dz$  — дифференциала вращения вокруг оси  $z$  и дифференциала сдвига вдоль этой оси соответственно. Поэтому  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B}_0 = \{d\varphi_z, dz\}$ .

Вершины фундаментального семейства  $A_i$  и  $B_i$  поместим в точки  $(0, 0, i+2)$  и  $(0, 0, i-1)$  соответственно,  $O$  и  $P$  поместим в точки  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, 0)$  соответственно.

Множество  $\mathcal{C}_1$  (множество базисных векторов пространства  $(dx)$ ) состоит из дифференциалов  $z$ -ой координаты вершин  $A_i, B_i, i = 1, 2, 3$  и дифференциалов декартовых координат вершин  $O, P$ . Выберем

$$\mathcal{B}_1 = \{dz_{A_1}, dy_O\}.$$

Тогда

$$\det_{\mathcal{B}_1} f_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_O & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Размерность пространства  $(dL)$  равна 32. Из них, 10 базисных векторов относятся к матрице  $f_2$ , а 22 вектора — к матрице  $f_3$ . Выберем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = \{ & dL_{B_3, A_1}, dL_{A_1, x_2 B_2}, dL_{B_2, A_3}, dL_{A_3, x_1 B_1}, dL_{B_1, A_2}, \\ & dL_{A_1, x_3 O}, dL_{A_1, P}, dL_{B_1, O}, dL_{x_1 B_1, P}, dL_{O, P} \}, \end{aligned}$$

где, например, запись вида  $x_2 B_2$  означает действие элемента  $x_2$  группы трилистника на вершине  $B_2$ .



Вычисление определителей подматрицы  $\mathcal{B}_2 f_2$  размера  $10 \times 10$  и подматрицы  $\mathcal{B}_3 f_3$  размера  $22 \times 22$  приводит к следующему результату:

$$\det \mathcal{B}_2 f_2 = 1440,$$

$$\det \mathcal{B}_3 f_3 = -\frac{(1 - \cos \varphi_1)^4 (1 - 2 \cos \varphi_1)^4}{167961600 \cos^{12} \varphi_1 (2 \cos^2 \varphi_1 - 1)^6}.$$

Подставляя найденные значения для определителей базисных миноров в (2.2), находим кручение комплекса (2.1) и затем, по формуле (2.3), получаем значение инварианта:

$$I_\rho(\mathcal{Z}_1) = -\frac{(2 - 2 \cos \varphi_1)^2}{(1 - 2 \cos \varphi_1)^4} = -\frac{(2 - 2 \cos \varphi_1)^2}{|\Delta_{\mathcal{Z}_1}(e^{i\varphi_1})|^4}, \quad (2.7)$$

где  $\Delta_{\mathcal{Z}_1}(t) = t^2 - t + 1$  — полином Александера для трилистника.

Полученный результат для трилистника, а также проведенные вычисления для некоторых других узлов и зацеплений позволяют нам сформулировать следующую гипотезу.

**Гипотеза 2.6.** Пусть  $L \subset S^3$  — зацепление с  $N$  компонентами. Обозначим  $\Delta_L(t_1, \dots, t_N)$  его полином Александера. Если представление  $\rho: \pi L \rightarrow \text{SO}(3)$  абелево, то

$$I_\rho(L) = \begin{cases} -|\Delta_L(e^{i\varphi_1})|^{-4} \cdot (2 - 2 \cos \varphi_1)^2, & N = 1 \\ -|\Delta_L(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_N})|^{-4}, & N > 1. \end{cases}$$

**СЛУЧАЙ НЕАБЕЛЕВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.** Напомним, что группа трилистника  $\pi\mathcal{Z}_1$  имеет копредставление с двумя образующими  $a, b$  и единственным соотношением  $a^2 = b^3$ . При этом, справедливы формулы:

$$x_1 = ab^{-1}, \quad x_2 = b^{-1}a, \quad x_3 = a^{-1}baba^{-1}, \quad (2.8)$$

где, как и выше,  $x_1, x_2, x_3$  — образующие группы трилистника в копредставлении Виртингера, а также соответствующие переходы на диаграмме (рис. 2.3).

Рассмотрим представление  $\rho: \pi\mathbb{Z}_1 \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  такое, что  $\mathrm{Tr} \rho(a) = 1 + 2 \cos(\pi)$ ,  $\mathrm{Tr} \rho(b) = 1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{3})$ . Другими словами, мы фиксируем оси, идущие через начало координат в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда,  $\rho(a)$  — это вращение вокруг одной из этих осей на угол  $\pi$ , а  $\rho(b)$  — вращение вокруг другой оси на угол  $\frac{2\pi}{3}$ . Обозначим  $\phi$  угол между этими осями.

Используя формулы (2.8), можно видеть, что переходы  $x_1, x_2, x_3$  под действием  $\Gamma$  переходят в отрезки на трех осях, углы между которыми попарно равны. Обозначим единичные направляющие векторы этих осей через  $e_1, e_2, e_3$  (вектор  $e_i$  соответствует оси с переходом  $x_i$ ). Образующие  $x_1, x_2, x_3$  представляются вращениями вокруг соответствующих осей на один и тот же угол  $\varphi_1$ . Простое вычисление показывает, что  $\varphi_1$  связано с  $\phi$  посредством соотношения:

$$\cos \varphi_1 = \frac{3}{2} \cos^2 \phi - 1.$$

Далее, для описанного представления мы будем использовать ту же самую триангуляцию, что и в абелевом случае. Поместим вершины фундаментального семейства  $A_i$  в точки  $(i + 2)e_i$ ; вершины  $B_1, B_2, B_3$  — в точки  $0, e_3, 2e_1$  соответственно; вершины  $O$  и  $P$  — в точки  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, 0)$  соответственно. Заметим, что для данных координат выполнены условия общего положения из замечания 1.1.

Централизатор подгруппы  $\mathrm{Im} \rho$  тривиален, поэтому  $\mathfrak{e}(3)_\rho = \mathfrak{o}$ . Отсюда следует, что

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 = \emptyset.$$

Выберем множество  $\mathcal{B}_2$  в виде:

$$\mathcal{B}_2 = \{dL_{B_3, A_1}, dL_{A_1, x_2 B_2}, dL_{B_2, A_3}, dL_{A_3, x_1 B_1}, dL_{B_1, A_2}, dL_{A_1, B_1}, \\ dL_{A_1, x_3 O}, dL_{A_1, O}, dL_{A_1, P}, dL_{B_1, O}, dL_{x_1 B_1, P}, dL_{B_2, P}\}.$$

Напомним, что запись вида  $x_2 B_2$  означает действие элемента  $x_2$  группы трилистника на вершине  $B_2$ .

Далее, мы вычисляем определители подматрицы  $\mathcal{B}_2 f_2$  размера  $12 \times 12$  и подматрицы  $\mathcal{B}_3 f_3$  размера  $20 \times 20$  и затем по формулам (2.2) и (2.3) находим значение инварианта:

$$I_\rho(3_1) = 4. \quad (2.9)$$

Узел трилистник является частным случаем так называемого торического узла.

**Определение 2.2.** Пусть  $\mu$  и  $\lambda$  — меридиан и параллель стандартно вложенного 2-тора,  $p$  и  $q$  — пара взаимно простых натуральных чисел. Тогда, замкнутую кривую вида  $p\mu + q\lambda$  называют *торическим узлом* типа  $(p, q)$  и обозначают  $T(p, q)$ .

Напомним, что группа торического узла  $T(p, q)$  имеет копредставление  $\pi T(p, q) = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$ . Рассмотрим представление  $\rho_{j,k}: \pi T(p, q) \rightarrow \text{SO}(3)$  такое, что  $\rho_{j,k}(a)$  — поворот вокруг оси  $x$  на угол  $\frac{2\pi j}{p}$ ,  $\rho_{j,k}(b)$  — поворот вокруг оси  $x'$  на угол  $\frac{2\pi k}{q}$ , где  $1 \leq j \leq \lfloor p/2 \rfloor$  и  $1 \leq k \leq \lfloor q/2 \rfloor$ . Угол между осями  $x$  и  $x'$  не равен нулю.

**Гипотеза 2.7.** Инвариант  $I_{j,k}(T(p, q))$  для представления  $\rho_{j,k}$  имеет вид:

$$I_{j,k}(T(p, q)) = \frac{1}{(pq)^2} \left( 4 \sin \frac{j\pi}{p} \sin \frac{k\pi}{q} \right)^4. \quad (2.10)$$

Заметим, что эта гипотеза согласуется с (2.9) для трилистника  $T(2, 3)$ .  
 Заметим также, что *неабелево кручение Райдемайстера*, скрученное действием группы  $SU(2)$ , для  $T(p, q)$  равно (см. [31, стр. 113])

$$-\frac{1}{pq} \left( 4 \sin \frac{j\pi}{p} \sin \frac{k\pi}{q} \right)^2 .$$

Таким образом, гипотеза 2.7 говорит, что  $I_{j,k}(T(p, q))$  равно квадрату неабелева кручения Райдемайстера для торических узлов.

## Глава 3. “Скрученная” версия геометрического инварианта

### § 3.1. Построение для 3-многообразий

Пусть  $M$  — связное замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие,  $T$  — его триангуляция,  $\pi_1(M)$  — фундаментальная группа. Как и в предыдущей главе, рассмотрим представление  $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{E}(3)$  и соответствующее ему регулярное накрытие  $p_\rho: \tilde{M} \rightarrow M$  с индуцированной симплициальной структурой  $\tilde{T}$ . Выделим из  $\tilde{T}$  фундаментальное семейство симплексов  $\mathcal{F}$  (см. определение 1.2) и построим непрерывное отображение  $\Gamma: \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Таким образом, до этого момента построение “скрученного” геометрического инварианта ничем не отличается от построения обычного инварианта, описанного в главе 1. Различия начинаются на этапе построения алгебраического комплекса. Можно сказать, что идея обобщения инварианта заключается в замене на данном этапе представления  $\rho$  тензорным произведением  $\alpha \otimes \rho$ , где

$$\alpha: \pi_1(M) \rightarrow G_{\beta_1} = H_1(M)/\text{Tors } H_1(M) \cong \langle t_1, \dots, t_{\beta_1} \mid t_i t_j = t_j t_i, \forall i, j \rangle \quad (3.1)$$

— *сюръективный* гомоморфизм фундаментальной группы в свободную абелеву группу ранга  $\beta_1$ . Напомним, что тензорное произведение гомоморфизмов определяется по формуле  $(\alpha \otimes \rho)(h) = \alpha(h)\rho(h)$ ,  $\forall h \in \pi_1(M)$ . Таким образом, наше обобщение геометрического инварианта будет нетривиальным только для многообразий с бесконечной фундаментальной группой.

Пусть  $v \in \mathcal{F}$  произвольная вершина фундаментального семейства. Век-

торное пространство  $(dx)_v$ , сопоставленное вершине  $v$  по определению состоит из форм объема  $dx_v \wedge dy_v \wedge dz_v$ , где  $dx_v, dy_v, dz_v$  — дифференциалы декартовых координат точки  $\Gamma(v) \in \mathbb{R}^3$ . Множеству всех вершин из  $\mathcal{F}$  сопоставим векторное пространство  $(dx) = \bigoplus_{v \in \mathcal{F}} (dx)_v$ .

Пусть  $e \in \mathcal{F}$  произвольное ребро фундаментального семейства. Как и прежде, положим  $L_e = \frac{1}{2}l_e^2$ , где  $l_e$  — евклидова длина ребра  $\Gamma(e) \in \mathbb{R}^3$ . Обозначим через  $dL_e$  дифференциал величины  $L_e$  и определим векторное пространство  $(dL) = \bigoplus_{e \in \mathcal{F}} (dL_e)$ , где  $(dL_e)$  — одномерное пространство, и прямая сумма распространяется на все ребра фундаментального семейства. Аналогично определим пространство  $(d\Omega) = \bigoplus_{e \in \mathcal{F}} (d\Omega_e)$ , где  $\Omega_e = \frac{\omega_e}{l_e}$  и  $\omega_e$  — угол дефекта ребра  $\Gamma(e)$  (см. определение 1.1).

Далее, рассмотрим линейное отображение  $f_2: (dx) \rightarrow (dL)$ . По определению, заданные дифференциалы координат некоторых вершин  $A$  и  $B$  при  $f_2$  переходят в

$$dL_{AB} = (x_B - x_A)(dx_B - dx_A) + (y_B - y_A)(dy_B - dy_A) + (z_B - z_A)(dz_B - dz_A). \quad (3.2)$$

Однако теперь, если, к примеру, вершина  $B$  не принадлежит фундаментальному семейству и имеет место равенство  $B = \rho(h)B'$ , где  $B' \in \mathcal{F}$  и  $h \in \pi_1(M)$ , то в формулу (3.2) мы подставляем

$$\begin{pmatrix} dx_B \\ dy_B \\ dz_B \end{pmatrix} = \alpha(h)\rho(h) \begin{pmatrix} dx_{B'} \\ dy_{B'} \\ dz_{B'} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Таким образом, при вычислении дифференциалов координат вершин, не принадлежащих фундаментальному семейству, мы заменяем представление  $\rho$  на  $\alpha \otimes \rho$ .

Занумеруем ребра фундаментального семейства в некотором порядке и введем в рассмотрение матрицу  $f_3 = \left( \frac{\partial \Omega_i}{\partial L_j} \right)$ , где  $i$  и  $j$  пробегают все ребра из  $\mathcal{F}$ . Любой элемент матрицы  $f_3$  имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial L_j} = \sum_k p_k a_{ij}^{(k)}, \quad (3.4)$$

где индекс  $k$  пробегает все тетраэдры из  $\mathcal{F}$ . Каждое из слагаемых  $a_{ij}^{(k)}$  соответствует своему тетраэдру и либо равно нулю, либо определяется одним из пяти случаев, рассмотренных в § 1.1. При этом, если в  $k$ -ый тетраэдр, вместо ребер  $i, j \in \mathcal{F}$  входят ребра  $i', j'$  такие, что  $i' = h_1 i$ ,  $j' = h_2 j$ , где  $h_1, h_2 \in \pi_1(M)$ , то слагаемое  $a_{ij}^{(k)}$  в (3.4) умножается на  $\frac{\alpha(h_1)}{\alpha(h_2)}$ , т.е.  $p_k = \frac{\alpha(h_1)}{\alpha(h_2)}$ .

Из леммы 1.10 следует равенство  $f_3 = f_3^*$ , где матрица  $f_3^*$  получается из  $f_3$  транспонированием и одновременной заменой всех  $t_i$  на  $t_i^{-1}$ .

Рассмотрим последовательность векторных пространств и линейных отображений

$$0 \rightarrow (dx) \xrightarrow{f_2} (dL) \xrightarrow{f_3=f_3^*} (d\Omega) \xrightarrow{-f_2^*} (dx)^* \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Здесь, как и прежде, мы обозначили  $(dx)^*$  векторное пространство, фиксированный базис которого двойственен базису пространства  $(dx)$ .

Отсутствие в последовательности (3.5) пространства, аналогичного  $\mathfrak{e}(3)_\rho$ , можно обосновать следующим образом. Напомним, что (см. главу 1, начало § 1.2)

$$\mathfrak{e}(3)_\rho \cong H^0(M; \text{Ad}_\rho).$$

Формально заменяя здесь  $\text{Ad}_\rho$  на  $\alpha \otimes \text{Ad}_\rho$ , получаем пространство

$$H^0(M; \alpha \otimes \text{Ad}_\rho) = \{u \in \mathfrak{e}(3) \mid \alpha(h) \text{Ad}_{\rho(h)} u = u, \forall h \in \pi_1(M)\},$$

которое тривиально для любого  $\rho$ . Действительно, пусть  $u \in \mathfrak{e}(3)$  лежит в

$H^0(M; \alpha \otimes \text{Ad}_\rho)$ . В частности, это означает, что

$$u = t_i \text{Ad}_{\rho(h_i)} u,$$

где  $h_i \in \pi_1(M)$  — некоторый прообраз из  $\alpha^{-1}(t_i)$ . Сравнивая степени при  $t_i$  в левой и правой частях этого равенства, мы получаем, что с необходимостью  $u = 0$ .

Аналогично можно обосновать отсутствие пространства  $(dg)$  в последовательности (3.5). Другими словами, можно показать, что  $H^1(M; \alpha \otimes \text{Ad}_\rho) = 0$ . Действительно, условие 1-коцикла для  $\xi: \pi_1(M) \rightarrow \mathfrak{e}(3)$  в нашем случае выглядит так:

$$\xi(g_1 g_2) = \xi(g_1) + \alpha(g_1) \text{Ad}_{\rho(g_1)} \xi(g_2). \quad (3.6)$$

Полагая  $g_2 = g_1^{-1}$ , получаем равенство  $\xi(g_1)(\alpha(g_1) - 1) = 0$ , которое должно выполняться для всех  $g_1 \in \pi_1(M)$ . Отсюда следует тривиальность отображения  $\xi$ .

Последовательность (3.5) очевидно является комплексом (определение 1.3). Предположим, что для некоторых  $M$  и  $\rho$  этот комплекс является ациклическим. Тогда мы можем определить его кручение (определение 1.6):

$$\tau = (-1)^{\text{rank } f_2} \frac{(\det_{\mathcal{B}_2} f_2)(\det_{\mathcal{B}_2} f_2^*)}{\det_{\mathcal{B}_3} f_3}, \quad (3.7)$$

где, как и прежде,  $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{C}_i$  — подмножество базисных векторов, принадлежащих пространству  $\text{Im } f_i$  и  $\mathcal{B}_i f_i$  — соответствующий базисный минор матрицы  $f_i$ .

Положим

$$I_{\alpha \otimes \rho}(M) = \frac{\tau}{\prod(-V)}, \quad (3.8)$$

где  $V$  — ушестеренный объем тетраэдра и произведение распространяется на все тетраэдры из  $\mathcal{F}$ .



**Теорема 3.1.** *Для фиксированного представления  $\rho$  величина  $I_{\alpha \otimes \rho}(M)$  является инвариантом многообразия  $M$ .*

*Доказательство* практически ничем не отличается от доказательства теоремы 1.13. □

**Вычисления для  $S^2 \times S^1$**  Чтобы вычислить “скрученный” инвариант для пространства  $S^2 \times S^1$  мы будем использовать ту же самую триангуляцию и то же самое представление  $\rho$ , что и при вычислениях “нескрученной” версии геометрического инварианта (рис. 1.6). Объемы тетраэдров триангуляции по-прежнему определяются формулами (1.54). Найдем кручение  $\tau$  комплекса (3.5).

Пусть  $h$  — образующая группы  $\pi_1(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Обозначим  $t = \alpha(h)$ . Поскольку  $\dim(dx) = \dim(dL) = 9$ , то  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{C}_2$ . Вычисление определителя подматрицы  $\mathcal{B}_2 f_2$  размера  $9 \times 9$  приводит к следующему результату:

$$\det \mathcal{B}_2 f_2 = -h^3(t-1)^2(t^2 - 2t \cos \gamma + 1)^2(\cos \gamma + \sin \gamma). \quad (3.9)$$

Множество  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{B}_2$  пусто. Поэтому

$$\det \mathcal{B}_3 f_3 = 1.$$

Подставляя найденные значения для определителей базисных миноров в (3.7), находим кручение  $\tau$  комплекса (3.5) и затем, по формуле (3.8), получаем значение “скрученного” инварианта:

$$I_{\alpha \otimes \rho}(S^2 \times S^1) = \left( 8 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi + \gamma}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} \right)^4, \quad (3.10)$$

где мы использовали представление  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{U}(1): t \mapsto e^{i\varphi}$  для того, чтобы перейти от элемента группы  $t$  к вещественной переменной  $\varphi$ .

## § 3.2. Построение для зацеплений

Пусть  $L$  — снабженное ориентацией зацепление с  $N$  компонентами. Как и при построении “нескрученной” версии инварианта из главы 2, мы сначала строим триангуляцию 3-сферы, по ребрам которой проходит зацепление. Затем, по заданному представлению  $\rho$  группы зацепления  $\pi L$  в  $\mathrm{SO}(3)$  строим разветвленное вдоль  $L$  накрытие сферы с индуцированной симплициальной структурой и выделяем в нем фундаментальное семейство симплексов  $\mathcal{F}$ . После этого, отображаем накрывающее пространство в трехмерное евклидово пространство в соответствии с действием группы  $\mathrm{Im} \rho$ .

На этапе построения алгебраического комплекса мы, в полной аналогии со случаем 3-многообразий, заменяем представление  $\rho$  тензорным произведением представлений  $\alpha \otimes \rho$ , где

$$\alpha: \pi L \rightarrow G_N = \mathbb{Z}^N \cong \langle t_1, \dots, t_N \mid t_i t_j = t_j t_i, \forall i, j \rangle \quad (3.11)$$

— представление абелизации.

Пусть  $v$  — вершина фундаментального семейства. Определим векторное пространство  $(dx)_v$ , состоящее из форм объема  $dx_v \wedge dy_v \wedge dz_v$ , где  $dx_v, dy_v, dz_v$  — дифференциалы декартовых координат точки  $\Gamma(v)$ . Векторное пространство  $(dx) = \bigoplus (dx)_v$  сопоставляется множеству всех вершин из  $\mathcal{F}$  таких, что их образы *не лежат* на зацеплении.

Пусть  $e$  — ребро фундаментального семейства. Определим векторное пространство  $(dL)$ , построенное на дифференциалах  $dL_e$  как на базисных векторах для всех ребер из  $\mathcal{F}$ , образы которых *не лежат* на зацеплении. Аналогично строится пространство  $(d\Omega)$ .

Определим линейные отображения  $f_2: (dx) \rightarrow (dL)$  и  $f_3: (dL) \rightarrow (d\Omega)$  в полной аналогии со случаем 3-многообразий (§ 3.1) и рассмотрим последовательность векторных пространств и отображений:

$$0 \rightarrow (dx) \xrightarrow{f_2} (dL) \xrightarrow{f_3=f_3^*} (d\Omega) \xrightarrow{-f_2^*} (dx)^* \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Здесь, как и выше, мы обозначили  $f_2^*$  матрицу, которая получается из  $f_2$  транспонированием и одновременной заменой всех  $t_i$  на  $t_i^{-1}$ .

В предположении, что комплекс (3.12) является ациклическим для некоторых  $L$  и  $\rho$ , мы можем определить его кручение:

$$\tau = (-1)^{\text{rank } f_2} \frac{(\det_{\mathcal{B}_2} f_2)(\det_{\mathcal{B}_2} f_2^*)}{\det_{\mathcal{B}_3} f_3}. \quad (3.13)$$

Положим

$$I_{\alpha \otimes \rho}(L) = \tau \cdot \frac{\prod_{j=1}^N (2 \cos \varphi_j - t_j - t_j^{-1})^{n_j}}{\prod(-V)}. \quad (3.14)$$

Здесь, как и прежде,  $N$  — число компонент зацепления,  $n_j$  — количество вершин в триангуляции сферы  $S^3$ , принадлежащих  $j$ -ой компоненте зацепления,  $\varphi_j$  — углы, параметризующие представление  $\rho$  (поворот на угол  $\varphi_j$  вокруг перехода, принадлежащего  $j$ -ой компоненте, представляет соответствующую образующую группы зацепления),  $t_j$  — образ меридиана  $j$ -ой компоненты относительно  $\alpha$ . В знаменателе произведение ушестеренных объемов  $V$  распространяется на все тетраэдры из  $\mathcal{F}$ .

**Теорема 3.2.** *Для фиксированного представления  $\rho$  величина  $I_{\alpha \otimes \rho}(L)$  является инвариантом зацепления  $L$ .*

*Доказательство.* Доказательство инвариантности величины  $I_{\alpha \otimes \rho}(L)$  при движениях Пахнера, а также независимость от выбора фундаментального семейства  $\mathcal{F}$  и отображения  $\Gamma$  практически полностью совпадает с доказательством

соответствующих лемм для “нескрученного” инварианта. Покажем инвариантность величины  $I_{\alpha \otimes \rho}(L)$  при движениях  $1 \leftrightarrow 2$ .

Пусть в тетраэдре  $BDAA$  из  $\Gamma(\mathcal{F})$  ребро  $BD$  лежит на фиксированной компоненте зацепления  $L$ , а ребро  $AA$  есть образ меридиана этой компоненты. Пусть представление  $\rho: \pi L \rightarrow \text{SO}(3)$  переводит обход по  $AA$  во вращение на угол  $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$  вокруг оси  $z$ . Обозначим  $t = \alpha(AA)$ . Вершины фундаментального семейства, соответствующие началу и концу ребра  $AA$ , под действием отображения  $\Gamma$  переходят в разные точки евклидова пространства. Напомним, что при движении  $1 \rightarrow 2$  на ребре  $BD$  добавляется новая вершина  $C$  и тем самым тетраэдр  $BDAA$  заменяется на два тетраэдра  $BCAA$  и  $CDAA$ .

Соображения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 1.15, показывают, что кручение комплекса (3.12) умножается при движении  $1 \rightarrow 2$  на  $\frac{\partial \Omega_{AC}}{\partial L_{AC}}$ . Прямым вычислением находим, что

$$\frac{\partial \Omega_{AC}}{\partial L_{AC}} = -\frac{1}{2 \cos \varphi - t - t^{-1}} \cdot \frac{V_{BCAA} V_{CDAA}}{V_{BDAA}}. \quad (3.15)$$

Таким образом, кручение (3.13) комплекса (3.12)

- приобретает множитель  $\frac{1}{2 \cos \varphi - t - t^{-1}}$  при добавлении вершины (в нашем случае  $C$ ) на зацеплении;
- приобретает множитель  $(-V)$  при добавлении тетраэдра и множитель  $(-V)^{-1}$  для каждого убираемого тетраэдра.

Все это вместе гарантирует инвариантность величины  $I_{\alpha \otimes \rho}(L)$  при движениях  $1 \leftrightarrow 2$ . Поскольку она так же инвариантна при движениях Пахнера, то по теореме 2.1, величина  $I_{\alpha \otimes \rho}(L)$  не зависит от способа триангуляции трехмерной сферы. Теорема 3.2 доказана.  $\square$

Вычисления для трилистника Пусть  $\rho: \pi\mathbb{Z}_1 \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  — неабелево представление группы трилистника такое, что  $\mathrm{Tr} \rho(a) = 1 + 2 \cos(\pi)$ ,  $\mathrm{Tr} \rho(b) = 1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{3})$ , где образующие  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению:  $a^2 = b^3$ . Напомним, что образующие Виртингера  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  однозначно соответствуют переходам на диаграмме трилистника (рис. 2.3) и выражаются через  $a$  и  $b$  по формулам (2.8). Переходы  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  под действием  $\Gamma$  переходят в отрезки на трех осях, углы между которыми попарно равны. Обозначим единичные направляющие векторы этих осей через  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ .

Далее, для описанного представления мы будем использовать ту же самую триангуляцию 3-сферы, что и при вычислениях “нескрученной” версии инварианта в § 2.3. Поместим вершины фундаментального семейства  $A_i$  в точки  $(i + 2)e_i$ ; вершины  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  — в точки  $0$ ,  $e_3$ ,  $2e_1$  соответственно; вершины  $O$  и  $P$  — в точки  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, 0)$  соответственно. Очевидно, что для данных координат выполнены условия общего положения из замечания 1.1.

Выберем множество  $\mathcal{B}_2$  в виде:

$$\mathcal{B}_2 = \{dL_{A_1, x_3 O}, dL_{A_1, O}, dL_{A_1, P}, dL_{B_1, O}, dL_{x_1 B_1, P}, dL_{B_2, P}\}.$$

Напомним, что запись вида  $x_3 O$  означает действие элемента  $x_3$  группы трилистника на вершине  $O$ . Тогда, вычисляя определитель подматрицы  $\mathcal{B}_2 f_2$  размера  $6 \times 6$ , находим:

$$\mathcal{B}_2 f_2 = \frac{27(2 \cos \varphi_1 - 1) \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{t(\cos \varphi_1 - 1)^2}.$$

Далее мы вычисляем определитель подматрицы  $\mathcal{B}_3 f_3$  размера  $20 \times 20$  и затем по формулам (3.13) и (3.14) находим значение инварианта:

$$I_{\alpha \otimes \rho}(\mathbb{Z}_1) = -\frac{t^3}{(1 - t^3)^2}. \quad (3.16)$$

*Замечание 3.1.* Скрученный полином Александера для трилистника и неабелева представления  $\rho: \pi\mathbb{Z}_1 \rightarrow \mathrm{SO}(3)$  по определению (см. например [40, стр. 435]) равен

$$\Delta_{\mathbb{Z}_1, \rho}(t) = \frac{\det(\alpha \otimes \rho(1+a))}{\det(\alpha \otimes \rho(1-b))} = \frac{\det(\mathbf{1}_3 + t^3 \rho(a))}{\det(\mathbf{1}_3 - t^2 \rho(b))}.$$

Собственные значения матрицы  $\rho(a)$  равны  $1, -1, -1$ , а матрицы  $\rho(b) - 1, e^{-2\pi\sqrt{-1}/3}, e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$ . Поэтому,

$$\Delta_{\mathbb{Z}_1, \rho}(t) = \frac{(1+t^3)(1-t^3)^2}{(1-t^2)(1+t^2+t^4)} = 1-t^3.$$

Сравнивая это с (3.16), получаем

$$I_{\alpha \otimes \rho}(\mathbb{Z}_1) = -\frac{t^3}{\Delta_{\mathbb{Z}_1, \rho}(t)^2}.$$

Проведенные вычисления показали, что аналогичный результат верен и для других узлов, в частности, для восьмерки  $4_1$ .

## Список литературы

- [1] Барут, А. Теория представлений групп и ее приложения, том 1 / А. Барут, Р. Рончка.– М.: Мир, 1980.– 455 с.
- [2] Берже, М. Геометрия, том 1 / М. Берже.– М.: Мир, 1984.– 560 с.
- [3] Виро О.Я. Двухлистные разветвленные накрытия трехмерной сферы / О.Я. Виро // Записки научных семинаров ЛОМИ.– 1973.– Т.36.– С.6-39.
- [4] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер.– М.: Наука, 1966.– 576 с.
- [5] Грин, М. Теория суперструн, том 1 / М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.– М.: Мир, 1990.– 518 с.
- [6] Зейферт, Г. Топология / Г. Зейферт, В. Трельфалль.– Ижевск: РХД, 2001.– 448 с.
- [7] Дубровин, Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко.– М.: Наука, 1986.– 760 с.
- [8] Корепанов, И.Г. Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных многообразий. I. Перестройки  $3 \rightarrow 3$  / И.Г. Корепанов // ТМФ.– 2001.– Т.131, № 3.– С.377-388.
- [9] Корепанов, И.Г. Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных многообразий. II. Алгебраический комплекс и перестройки  $2 \leftrightarrow 4$  / И.Г. Корепанов // ТМФ.– 2002.– Т.133, № 1.– С.24-35.
- [10] Корепанов, И.Г. Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных

- многообразий. III. Перестройки  $1 \leftrightarrow 5$  и связанные с ними структуры / И.Г. Корепанов // ТМФ.– 2003.– Т.135, № 2.– С.179-195.
- [11] Корепанов, И.Г.  $SL(2)$ -решение уравнения пентагона и инварианты трехмерных многообразий / И.Г. Корепанов // ТМФ.– 2004.– Т.138, № 1.– С.23-34.
- [12] Корепанов, И.Г. Геометрия евклидовых тетраэдров и инварианты узлов / И.Г. Корепанов // Фундаментальная и прикладная математика.– 2005.– Т.11, № 4.– С.105-117.
- [13] Корепанов, И.Г. Классическое решение уравнения пентагона, связанное с группой  $SL(2)$  / И.Г. Корепанов, Е.В. Мартюшев // ТМФ.– 2001. Т.129, № 1.– С.1320-1324.
- [14] Матвеев, С.В. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии / С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко.– М.: Изд-во МГУ, 1991.– 301 с.
- [15] Прасолов В.В. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия / В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский.– М.: МЦНМО, 1997.– 360 с.
- [16] Рурк, К. Введение в кусочно линейную топологию / К. Рурк, Б. Сандерсон.– М.: Мир, 1974.– 208 с.
- [17] Савельев, Н.Н. Лекции по топологии трехмерных многообразий. Введение в инвариант Кассона / Н.Н. Савельев.– М.: МЦНМО, 2004.– 216 с.
- [18] Тёрстон, У. Трехмерная топология и геометрия / У. Тёрстон.– М.: МЦНМО, 2001.– 312 с.



- [19] Тураев, В.Г. Введение в комбинаторные кручения / В.Г. Тураев.– М: МЦ-НМО, 2004.– 136 с.
- [20] Халмош, П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош.– М.: Физматгиз, 1963.– 264 с.
- [21] Шафаревич, И.Р. Основы алгебраической геометрии, том. 1 / И.Р. Шафаревич.– М.: Наука, 1988.– 348 с.
- [22] Adams, C.C. The knot book / C.C. Adams.– Providence: American Mathematical Society, 2004.– P.307.
- [23] Alexander, J.W. Topological invariants of knots and links / J.W. Alexander // Trans. Amer. Math. Soc.– 1928.– Vol.30.– P.275-306.
- [24] Alexander, J.W. The combinatorial theory of complexes / J.W. Alexander // Ann. of Math.– 1930.– Vol.31.– P.292-320.
- [25] Barrett, J.W. Invariants of piecewise-linear 3-manifolds / J.W. Barrett, B.W. Westbury // Trans. Amer. Math. Soc.– 1996.– Vol.348.– P.3997-4022.
- [26] Bott R. Differential forms in algebraic topology (Graduate texts in mathematics) / R. Bott, L.W. Tu.– New York: Springer-Verlag, 1982.– P.331.
- [27] Chapman, T. Topological invariance of Whitehead torsion / T. Chapman // Amer. J. Math.– 1974.– Vol.96.– P.488-497.
- [28] Cohen, M. A course in simple homotopy theory (Graduate texts in mathematics) / M. Cohen.– New York: Springer-Verlag, 1973.– P.114.

- [29] Culler, M. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds / M. Culler, P. Shalen // Ann. of Math.– 1983.– Vol.117.– P.109-146.
- [30] Dubois, J. Non abelian Reidemeister torsion and volume form on the  $SU(2)$ -representation space of knot groups / J. Dubois // Annales de l'institut Fourier.– 2005.– Vol.55, No.5.– P.1685-1734.
- [31] Dubois, J. Torsion de Reidemeister non abelienne et forme volume sur l'espace des représentations du groupe d'un nœud: Ph.D. thesis / J. Dubois.– Université Blaise Pascal, 2003.
- [32] Franz, W. Über die torsion einer überdeckung / W. Franz // J. Reine Angew. Math.– 1935.– Vol.173.– P.245-254.
- [33] Fox, R.H. Covering spaces with singularities / R.H. Fox // Algebraic Geometry and Topology: A symposium in honor of S.Lefschetz. Princeton Math. Series.– 1957.– Vol.12.– P.243-257.
- [34] Goda H. Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomials and fibered knots / H. Goda, T. Kitano, T. Morifuji // Comment. Math. Helv.– 2005.– Vol.80, No. 1.– P.51-61.
- [35] Heusener, M.  $SO(3)$ -representation curves for two-bridge knot groups / M. Heusener // Math. Ann.– 1994.– Vol.298.– P.327-348.
- [36] Heusener, M. An orientation for the  $SU(2)$ -representation space of knot groups / M. Heusener // Topology and its Applications.– 2003.– Vol.127.– P.175-197.
- [37] Heusener, M. Deformations of reducible representations of 3-manifold groups

- into  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  / M. Heusener, J. Porti // Algebraic and Geometric Topology.– 2005.– Vol.5.– P.965-997.
- [38] Kirillov, A.N. Representations of the algebra  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ ,  $q$ -orthogonal polynomials and invariants of links / A.N. Kirillov, N.Yu. Reshetikhin // Infinite-dimensional Lie algebras and groups.– Teaneck: World Sci. Publ. Co., 1989.– P.285-339.
- [39] Kirk, P. Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson–Gordon invariants / P. Kirk, C. Livingston // Topology.– 1999.– Vol.38.– P.635-661.
- [40] Kitano, T. Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion / T. Kitano // Pacific J. Math.– 1996.– Vol.174, No.2.– P.431-442.
- [41] Kitano, T. Twisted Alexander polynomial and surjectivity of a group homomorphism / T. Kitano, M. Suzuki, M. Wada // Algebr. Geom. Topol.– 2005.– Vol.5.– P.1315-1324.
- [42] Klassen, E. Representations of knot groups in  $\mathrm{SU}(2)$  / E. Klassen // Trans. Amer. Math. Soc.– 1991.– Vol.326.– P.795-828.
- [43] Korepanov, I.G. Invariants of PL manifolds from metrized simplicial complexes / I.G. Korepanov // J. Nonlin. Math. Phys.– 2001.– Vol.8., No.2.– P.196-210.
- [44] Korepanov, I.G. Euclidean tetrahedra and knot invariants / I.G. Korepanov // Известия Челябинского научного центра.– 2004.– Vol.24., No.3.– P.1-5.
- [45] Korepanov, I.G. Invariants of three-dimensional manifolds from four-

- dimensional Euclidean geometry / I.G. Korepanov // preprint.– arXiv:math.GT/0611325.– 2006.
- [46] Korepanov, I.G. Distinguishing three-dimensional lens spaces  $L(7, 1)$  and  $L(7, 2)$  by means of classical pentagon equation / I.G. Korepanov, E.V. Martyshev // J. Nonlin. Math. Phys.– 2002.– Vol.9., No.1– P.86-98.
- [47] Lickorish, W.B.R. Simplicial moves on complexes and manifolds / W.B.R. Lickorish // Geometry and Topology Monographs.– 1989.– Vol.2.– P.299-320.
- [48] Lickorish, W.B.R. An introduction to knot theory (Graduate texts in mathematics) / W.B.R. Lickorish.– New York: Springer-Verlag, 1997.– P.220.
- [49] Lin, X.S. Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials / X.S. Lin // Acta Math. Sin.– 2001.– Vol.17, No.3.– P.361-380.
- [50] Martyshev, E.V. Euclidean simplices and invariants of three-manifolds: a modification of the invariant for lens spaces / E.V. Martyshev // Известия Челябинского научного центра.– 2003.– Vol.19., No.2.– P.1-5.
- [51] Martyshev, E.V. Euclidean geometric invariants of links in 3-sphere / E.V. Martyshev // Известия Челябинского научного центра.– 2004.– Vol.26., No.4.– P.1-5.
- [52] Milnor, J.W. A duality theorem for Reidemeister torsion / J.W. Milnor // Ann. of Math.– 1962.– Vol.76.– P.134-147.
- [53] Milnor, J.W. Whitehead torsion / J.W. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc.– 1966.– Vol.72.– P.358-426.

- [54] Milnor, J.W. Collected papers, Vol. 1:Geometry / J.W. Milnor.– Houston: Publish or Perish, Inc., 1994.– P.295.
- [55] Moise, E.E. Affine structures in 3-manifolds: V. The triangulation theorem and Hauptvermutung / E.E. Moise // Ann. of Math.– 1952.– Vol.56.– P.96-114.
- [56] Mulazzani, M. The many faces of cyclic branched coverings of 2-bridge knots and links / M. Mulazzani, A. Vesnin // preprint.– arXiv:math.GT/0106164.– 2005.
- [57] Newman, M.H.A. On the foundations of combinatorial analysis situs / M.H.A. Newman // Proc. Royal Acad. Amsterdam.– 1926.– Vol.29.– P.610-641.
- [58] Newman, M.H.A. A theorem in combinatorial topology / M.H.A. Newman // J. London Math. Soc.– 1931.– Vol.6.– P.186-192.
- [59] Pachner, U. PL homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings / U. Pachner // Europ. J. Combinatorics.– 1991.– Vol.12.– P.129-145.
- [60] Ponzano, G. Semiclassical limit of Racah coefficients / G. Ponzano, T. Regge // Spectropic and Group Theoretical Methods in Physics.– 1968.– P.1-58.
- [61] Racah, G. Theory of complex spectra II / G. Racah // Phys. Rev.– 1942.– Vol.62.– P.438-462.
- [62] Reidemeister, K. Homotopieringe und linsenräume / K. Reidemeister // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.– 1935.– Vol.11.– P.102-109.

- [63] Riley, R. Nonabelian representations of 2-bridge knot groups / R. Riley // Quart. J. Math. Oxf.– 1984.– Vol.35.– P.191-208.
- [64] Roberts, J. Classical  $6j$ -symbols and the tetrahedron / J. Roberts // Geometry and Topology.– 1999.– Vol.3.– P.21-66.
- [65] Rolfsen D. Knots and links, Mathematics lecture series, Vol. 7 / D. Rolfsen.– Houston: Publish or Perish, Inc., 1976.– P.439.
- [66] Taylor, Y. Spherical tetrahedra and invariants of 3-manifolds / Y. Taylor, C. Woodward // preprint.– arXiv:math.GT/0406228.– 2004.
- [67] Taylor, Y.  $6j$  symbols for  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  and non-Euclidean tetrahedra / Y. Taylor, C. Woodward // Selecta Math.– 2005.– Vol.11, No.3-4.– P.539-571.
- [68] Turaev, V.G. Reidemeister torsion and the Alexander polynomial / V.G. Turaev // Math. USSR Sb.– 1976.– Vol.30, No.2.– P.221-237.
- [69] Turaev, V.G. Reidemeister torsion in knot theory / V.G. Turaev // Russian Math. Surveys.– 1986.– Vol.41., No.1.– P.119-182.
- [70] Turaev, V.G. State sum invariants of 3-manifolds and quantum  $6j$ -symbols / V.G. Turaev, O.Ya. Viro // Topology.– 1992.– Vol.31.– P.865-902.
- [71] Wada, M. Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups / M. Wada // Topology.– 1994.– Vol.33, No.2.– P.241-256.
- [72] Waldhausen, F. Algebraic K-theory of generalized free products. Part I / F. Waldhausen // Ann. of Math.– 1978.– Vol.108.– P.135-204.

- [73] Wigner, E.P. On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of S.R. groups, manuscript (1940) / E.P. Wigner // Quantum Theory of Angular Momentum.— New York: Academic Press, 1965.— P.87-133.